Szemelvények a magyar matematika elmúlt 30 évének eredményeiből

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés 2

2. Algebra 2

3. Analízis 5

4. Geometria és topológia 10

5. Halmazelmélet és logika 13

6. Kombinatorika 14

7. Számelmélet 16

8. Számítástudomány 22

9. Sztochasztika, statisztikus fizika, dinamikai rendszerek, információelmélet 26

10. Elnyert European Research Council-pályázatok 31

11. Nemzetközi, vagy magas rangú külföldi szakmai kitüntetések, díjak 32

Hivatkozások 34

1. Bevezetés

A Magyar Tudományos Akadémia 191. közgyűlése úgy döntött, hogy támogatja egy kiadvány megjelenését „A magyar tudományos kutatás kiemelkedő eredményei a rendszerváltástól napjainkig (1989–2019)" címmel. (42/2019.(V.7.) számú közgyűlési határozat). E határozatnak az MTA Matematikai Tudományok Osztálya az alábbi összeállítással tesz eleget.

Egy ilyen összefoglaló, tudományos eredményeket áttekintő anyag csakis esetleges lehet, hiszen a felsorolt eredmények kiválasztására lehetetlen objektív kritériumokat felállítani. Az, hogy egy eredmény „kiemelkedő" vagy „fontos", az szubjektív megítélés kérdése is. Sokszor még 30 év sem ad elég távlatot ahhoz, hogy egy eredmény valódi jelentőségét megállapíthassuk. Gondoljunk a kúpszeletek elméletére, amelyet i. e. 200 körül dolgozott ki Apollóniosz, de csak a XVII. században, Kepler munkássága nyomán derült ki, hogy ez az elmélet több egy geometriai kuriózumnál, és hogy az ismerete elengedhetetlen a csillagászatban. Euler már a XVIII. században foglalkozott gráfokkal (a königsbergi hidak problémája kapcsán), de csak a XX. században derült ki, hogy a gráfelmélet jóval több, mint szórakoztató fejtörők gyűjteménye. A matematikai kutatások alapozó jellegűek, a saját belső logikájukat követve haladnak. Nélkülözhetetlen eszközöket, módszereket biztosítanak az emberi megismerés más területei számára.

A matematika a magyar tudományosság egyik legsikeresebb és nemzetközileg egyik legjobban beágyazott ága. Ezt az elismertséget a Norvég Akadémia által odaítélt Abel-díjak (a Nobel-díj legközelebbi matematikai megfelője) egyértelműen bizonyítják, 2012-ben Szemerédi Endre, 2021-ben Lovász László kapott Abel-díjat.

Természetesen nem várhatjuk, hogy az alábbi összeállítás tartalmazzon minden fontosabb eredményt. Ennek a terjedelmi korlát is akadálya. Reméljük ugyanakkor, hogy a 8 fejezet tartalmas képet ad az elmúlt 30 év magyar matematikájának gazdag terméséről.

2. Algebra

Az absztrakt algebra számos területén értek el nagy jelentőségű eredményeket a magyar kutatók. Kürschák Józsefnek (1864–1933) az értékeléselméletet megalapozó, 1913-ban megjelent dolgozatára még ma is gyakran hivatkoznak a nemzetközi szakirodalomban. Azonban az algebrai kutatások csak az 1940-es évek végétől bontakoztak ki hazánkban. Rédei László (1900–1980) sokoldalú munkássága a számelmélet területén indult, később a csoportok, a gyűrűk, a félcsoportok és a polinomok elméletében teljesedett ki gazdag életműve. A fiatalon elhunyt Szele Tibor (1918–1955) és a később Amerikába emigrált Fuchs László (1924–) kutatásai az 1950-es években az Abel-csoportok elméletének világszerte legjelentősebb centrumává tették Magyarországot. Tanítványaik alapozták meg azokat a sokrétű vizsgálatokat, amelyeknek gyümölcsei az alábbiakban tárgyalt kiemelkedő algebrai eredmények az 1990–2020 időszakból.

Neumann János az operátoralgebrákat öt típusból építette fel. Ezek közül az egyik típusra Cuntz konstruált először példákat, és azóta ezeknek az ún. Cuntz-algebráknak

a vizsgálata dominálja az operátoralgebrai kutatásokat. Mivel az O_n Cuntz-algebrák és a komplex számtest feletti $(1, n)$-típusú Leavitt-algebrák ugyanazokkal a relációkkal vannak definiálva, azért az előbbiek épp az utóbbiak teljes burkai. A gyűrűk (algebrák) struktúrája azonban szegényebb a C*-algebrákénál, ezért nem volt világos, hogy Leavitt eredményei jelentenek-e valamit a C*-algebrák számára, és ha igen, akkor mit. Ezt a kérdést Pham Ngoc Anh vetette fel 2002-ben, és később mindenki meglepetésére társszerzőivel frappáns választ adott rá. Abrams, Anh és Pardo [3] bebizonyították, hogy az $(1, n)$-típusú Leavitt-algebra akkor és csak akkor izomorf a fölötte vett m-edrendű mátrixgyűrűvel, ha $n - 1$ és m relatív prímek. Ennek a tételnek az O_n-re vonatkozó megfelelője a C*-algebrákat osztályozó ún. Elliott-program egyik ékköve, amit K-elmélet segítségével igazoltak néhány évvel korábban, de konkrét izomorfizmust nem tudtak megadni. Ezt Anh és társszerzői megtalálták. Eredményüket felhasználva Pardo, Dick és Martinez-Perez megmutatta, hogy a Brin–Higman–Thompson-féle végesen prezentált egyszerű csoportok Leavitt-algebrák unitér részcsoportjaiként állnak elő.

A kategórielmélet első időszakában a kutatások fő iránya az Abel-kategóriák elméletének kiépítése volt, az erre épülő homologikus algebra a matematika széles köreiben elterjedt. MacLane egy megjegyzése nyomán sokan próbálták az elméletet kiterjeszteni a nemkommutatív esetre. A kérdésben számos sikertelen kísérlet után a 90-es évek végén váratlan áttörés született: a kategóriaelmélet modern eszközeit felhasználva Janelidze, Márki és Tholen [117] bevezették a félig-Abel kategóriák fogalmát, és megmutatták, hogy a korábbi kísérletek ötleteit jól lehet használni a megfelelő fogalom birtokában. Nagy hatású eredményük megváltoztatta a kategóriaelméletet, az azóta eltelt 20 év során a félig-Abel kategóriák elmélete a kategorikus algebra fő kutatási irányává vált. Ez az elmélet lehetővé teszi a nem kommutatív csoportok és gyűrűk elmélete bizonyos strukturális fejezeteinek (kommutátorelmélet, bővítéselmélet stb.) kategorikus általánosítását, többek között nem kommutatív homologikus módszerek kidolgozását, különböző algebrai területek váratlan kapcsolataira is rámutatva — pl. meglepetésre az univerzális algebrák Magari-féle ideálelmélete is a félig-Abel kategóriák egy speciális esete.

Az univerzális algebra az algebrai struktúrákat, azaz a műveletekkel ellátott halmazokat általános nézőpontból vizsgálja. Ennek a modern területnek a kibontakozásában magyar kutatók fontos szerepet játszottak. Szegedet a nemzetközi kutatóközösség a témakör öt legjelentősebb központja között tartotta számon. Az univerzális algebra egyik legfontosabb módszere az algebrák ún. kongruenciahálóinak tanulmányozása, amelyek az algebrák faktorstruktúráiról és ezeknek egymáshoz való viszonyáról hordoznak alapvető információkat. A kongruenciahálókra vonatkozó korábbi eredményeket számos új és mély felismeréssel gazdagította Kiss Emil a Keith Kearnes amerikai matematikussal közösen írt monográfiájában [137]. Példaként említhetjük azt az eredményüket, hogy ha egy egyenletekkel definiált algebraosztályban a felbonthatatlan (szakkifejezéssel: szubdirekt irreducibilis) algebrák mérete korlátos, és van olyan hálókra vonatkozó azonosság, amelyet az osztályba tartozó minden algebra kongruenciahálója teljesít, akkor a kongruenciahálók az egyik legalapvetőbb hálóazonosságot, a Dedekind által 1877-ben felfedezett moduláris azonosságot is teljesítik. A klasszikus algebrai struktúrák kongruenciahálóit tanulmányozva Pálfy Péter Pál és Szabó Csaba [177] egy olyan hálóazonosságot talált, amiely a kommutatív csoportok kongruenciahálóiban mindig teljesül, de

a nem-kommutatív csoportok körében már sérülhet – ezzel egy ötven éven át nyitott kérdést sikerült megválaszolniuk.

Jelölje $g(n)$ az n elemű (páronként nem izomorf) csoportok számát. A $g(n)$ függvény mélyebb vizsgálatát Higman indította el 1960-ban a p-csoportok számára adott alsó becslésével. Néhány évvel később Sims belátta, hogy az alsó korlát éles, azaz ha $n = p^x$, akkor $g(n) = n^{(2/27+o(1))x^2}$, ha x a végtelenhez tart. Gaschütz és Neumann egy, a 70-es évekből származó sejtése szerint az adott Sylow-részcsoportokkal rendelkező n elemű csoportok száma $g(n)$-nél lényegesen kisebb. Ezt az eredményt Pyber látta be 1993-as Annals of Math. cikkében [186]. Jelölje $f(n)$ a legfeljebb n elemű csoportok számát. A fenti eredmények egy egyszerű következménye, hogy $f(n) = n^{(2/27+o(1))(\log_2(n))^2}$. A 80-as évek végén Lubotzky és munkatársai egy új fejezetet nyitottak a végtelen csoportok elméletében, a részcsoport-növekedés elméletét. Jelölje $s_n(G)$ egy G csoport n indexű részcsoportjainak számát. A témakör egyik központi eredménye Lubotzky, Mann és Segal azon tétele szerkezetét, ahol $s_n(G)$ polinomiálisan nő. Ebben az elméletben a fenti bizonyítások módszereit számos helyen lehetett alkalmazni. Jelölje $m_n(G)$ egy G csoport n indexű maximális részcsoportjai számát. Véges permutációcsoportok számára adott becslésekre épít Pyber és Jaikin-Zapirain 2011-es Annals of Math. cikke [116] ahol pontosan leírják azon végesen generált provéges G csoportok struktúráját amelyekre $m_n(G)$ polinomiálisan nő. A bizonyítás egy váratlan következményeként sikerült pontos formulát adni arra, hogy egy G véges csoportot hány elem generál nagy valószínűséggel.

Egy halmazt saját magába képező függvényt injektívnek hívunk, ha bármely két elemnek különböző a képe. Véges halmazok alapvető tulajdonsága, hogy ha egy őt saját magába képező függvény injektív, akkor szükségszerűen szürjektív is, azaz mindem elem előáll képként. A végtelen halmazokra ugyanez nem érvényes: például az a függvény, amelyik minden egész számhoz a dupláját rendeli, injektív, de nem szürjektív. Halmazok helyett más struktúrákat, pl. csoportokat is vizsgálhatunk. Ilyenkor a fentivel analóg tulajdonságot „surjunctive"-nek nevezik. Gromov vette észre, hogy a szofikus csoportoknak megvan ez a tulajdonsága. Tehát úgy érdemes a szofikus csoportokra gondolni, hogy azok valamilyen értelemben a lelkük mélyén „végesek". Néhány évvel később Elek és Szabó egy cikksorozatban [68, 69] kidolgozták azokat a módszereket, amelyekkel jól vizsgálhatók a szofikus csoportok. Többek között belátták, hogy Kaplanski direkt-végességi sejtése igaz szofikus csoportokra. Az új módszerek hatására rohamos fejődésnek indult a téma, azóta is számtalan cikk születik szerte a világban. Érdekes módon az egyik legalapvetőbb kérdés még a mai napig is megoldatlan: igaz-e, hogy minden csoport szofikus?

Helfgott egy 2008-as áttörő eredménye szerint a $PSL(2,p)$ csoport generáló részhalmazai hatványozás hatására gyorsan nőnek. Ennek az eredménynek azonnali következménye Babai nevezetes, egyszerű csoportok átmérőjére vonatkozó sejtése a $PSL(2,p)$ egyszerű csoportra. A Fields-érmes Bourgain és Gamburd újabb áttörést értek el Helfgott eredményét használva. Belátták , hogy $PSL(2,p)$ minden olyan Cayley-gráfja expander, amelyben nincs kis kör. Ez az eredmény alapvető eszköznek bizonyult Bourgain, Gamburd és Sarnak affin szita elméletében. Ez az elmélet lehetővé teszi, hogy a számtani sorozatokra vonatkozó Dirichlet-tétel igen mély nem kommutatív általánosításait bizonyítsák. Az Affin Szita elmélet kiteljesítéséhez szükség volt Helfgott tételének egy magasabb dimenziós változatára. Egy ilyen, korlátos dimenziós Lie típusú egyszerű cso-

portokra vonatkozó általánosítás megtalálása vált a témakör egyik központi kérdésévé. Ezt az általánosítást, az úgynevezett szorzattételt lényegében egyszerre bizonyította be a Fields-érmes Tao munkatársaival, Greennel és Breuillarddal, illetve Pyber és Szabó [187]. A szorzattétel kimondja, hogy egy korlátos dimenziós nem kommutatív G véges egyszerű csoport generáló részhalmazai hatványozás hatására gyorsan nőnek. Ebből persze Babai átmérősejtése is adódik ilyen korlátos dimenziós egyszerű csoportokra. A szorzattételnek számtalan további alkalmazása van az expander gráfok, Lie-csoportok és az aritmetikai csoportok elméletében.

A csoportelmélet véges és végtelen objektumok szimmetriáit vizsgálja. A gráflimeszelmélet több ágon függetlenül kezdett fejlődni. A sűrű gráfok limeszelméletét az itthon nagyon erős kombinatorikus iskola kezdeti eredményei után Lovász László és Szegedy Balázs [159] dolgozta ki. A ritka gráfok limeszelmélete pedig az Aldous–Lyons–Peres–Schramm valószínűségszámítási iskola kezdeményezésére indult el, és viszonylag hamar megtalálta a kapcsolatot az ergodelmélettel és a végtelen csoportok elméletével. Ebből a kapcsolatból született a szofikus csoport fogalma. A ritka gráfok növekvő témává vált. Abért Miklós, társszerzőkkel együtt [1], Margulis–Zimmer ergodelméletét használta arra, hogy új módon megértse lokálisan szimmetrikus terek lokális geometriáját. Backhausz Ágnes és Szegedy Balázs [18] pedig a véletlen reguláris gráfok sajátvektorairól bizonyított struktúratételt. A területen vonzó, hogy a talált kapcsolatok tipikusan mindkét irányba tudnak matematikai energiát hordozni, tehát egy algebrai fogalom is újat tud mondani gráfokról. Abért Miklós, Yair Glasner és Virág Bálint [2] bevezették az invariáns véletlen részcsoport fogalmát, ami a normálosztó sztochasztikus verziója. A Kesten-tétel általánosítása invariáns véletlen részcsoportokra közvetlen új stuktúratételt adott véges Ramanujan-gráfok geometriájára. Az invariáns véletlen részcsoport az utóbbi évtizedben intenzíven, nemzetközi szinten kutatott területté vált.

(Szerkesztette: Abért Miklós, Márki László, Pálfy Péter Pál, Pyber László)

3. Analízis

A 20. század első felének nagy magyar matematikusai: Fejér Lipót, Riesz Frigyes, Pólya György, Szegő Gábor, Turán Pál, Erdős Pál, Rényi Alfréd egyszersmind az analízis, azon belül a mértékelmélet, approximációelmélet, interpolációelmélet, az ortogonális polinomok elmélete, a komplex függvénytan úttörő és meghatározó alakjai voltak. A magyar analízisiskolák az ő hagyományaikat folytatják.

Approximációelmélet, ortogonális polinomok, potenciálelmélet. A klasszikus (logaritmikus) potenciálelmélet azt vizsgálja, hogy ha pl. egységnyi töltést teszünk egy vezetőre (amit azonosítsunk a komplex sík egy E zárt részhalmazával), akkor egyensúlyban milyen ν_E eloszlású lesz a töltés, és milyen erőteret generál. A 90-es évektől vált világossá, hogy sok kérdés erre a problémára vezet azzal a módosítással, hogy még egy külső potenciáltér is jelen van – az idevágó elmélet E. B. Saff és Totik Vilmos 1997-es Grundlehren monográfiájában [192] került kidolgozásra. Mind a klasszikus, mind a külső térrel vett potenciálelmélettel nagyon sok probléma megoldása vált elérhetővé az

analízisben, approximácielméletben vagy az ortogonális polinomok elméletében. Többek között ez tette lehetővé a klasszikus ortogonális polinomok több száz éve (Jacobi, Hermite, Laguerre által) vizsgált elméletének kiterjesztését általános ν mérték szerint vett ortogonális polinomokra (Stahl–Totik [202]), ahol szinte minden mennyiség (pl. a főegyütthatók, zérushelyek, polinom-aszimptotikák) potenciálelmélettel fejezhetők ki. Például nagyon általános feltételek mellett a zérushelyek eloszlása ν_E lesz, ahol E a ν mérték tartója.

Meglepő módon régóta használt eszközök általánosításai is potenciálelméletre vezetnek, pl. annak ellenére, hogy a polinomok deriváltjaira vonatkozó több mint százéves Bernstein-egyenlőtlenségnek (amely szerint $|P_n'(x)| \le \|P_n\|_{[-1,1]} n/\sqrt{(1-x^2)}$) rengeteg kiterjesztése született, csak az utóbbi 20 évben derült ki, hogy az egyenlőtlenség szó szerint érvényes $[-1,1]$ helyett bármely E halmazon: $|P_n'(x)| \le \|P_n\|_E \sigma(x)$, ahol $\sigma(x)$ a ν_E egyensúlyi mérték sűrűsége (és ez pontos is). Hasonlóan, a külső térben vett potenciálok alapvető szerepet játszottak konform leképezések és Green-függvények numerikus meghatározásában; a (statisztikus kvantummechanikai modellekben érvényes) ún. univerzalitási tételekben, az azokkal kapcsolatos Christoffel-aszimptotikákban, ill. az igen hatékony Riemann–Hilbert-módszerben; a változó, ill. homogén polinomokkal történő approximáció elméletében (hazai résztvevők: Benkő Dávid, Kroó András, Szabados József, Totik Vilmos, Varjú Péter), az „incomplete polynomials" elméletben; racionális és Padé-approximációban. Hasonló Bernstein- és Markov-típusú egyenlőtlenségeket, illetve fordított Markov-egyenlőtlenségeket talált, részben szintén (másfajta) potenciálelméleti úton Révész Szilárd 1999 és 2018 között írt több dolgozatában.

A hazánkban nagy hagyományokkal rendelkező interpolációelméleti kutatások is változatlan intenzitással folytak, pl. ezen időszakban jelent meg a terület meghatározó monográfiája (Szabados József és Vértesi Péter [203]).

Dinamikus rendszerek, differenciálegyenletek. Krisztin Tibor szerzőtársaival (H.-O. Walther, J. Wu) a késleltetett visszacsatolást modellező differenciálegyenletek globális dinamikájának megértésében ért el alapvető eredményeket (1999-től egy monográfiában és több cikkben). Az egyenlet a függvénytérben egy végtelen dimenziós dinamikai rendszert definiál. Egyszerű alakja ellenére a generált dinamika bonyolult lehet. Monoton visszacsatolás esetére a nulla egyensúlyi helyzet instabil halmazának lezártját vizsgálták: ezt egyensúlyi helyzetek, periodikus pályák és az ezeket összekötő pályákat tartalmazó sima sokaságok alkotják, amelyek együtt egy ún. Morse-felbontást adnak. Ez mindig része a globális attraktornak, bizonyos esetekben megegyezik vele. Ez Chafee és Infante egy nemlineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó híres eredményének a megfelelője, de technikailag bonyolultabb. A bizonyításhoz a végtelen dimenziós dinamikai rendszerek számos új eszközének kidolgozására volt szükség.

Matematikai bizonyításokban számítógép használatára az első nagy sikert a négyszíntétel igazolása jelentette 1976-ban. A dinamikus rendszerek elméletében a nevezetes Lorenz-egyenlet kaotikus viselkedésének magyarázatára született bizonyítások indították el az ilyen irányú kutatásokat. Differenciaegyenletek vizsgálatában a bizonyítások – analitikus formulák hiányában – numerikus becsléseket igényelnek, amelyek hibái exponenciálisan nőnek az idő növekedésével. „Kézzel" általában lehetetlen elvégezni ezeket

a számolásokat, számítógép használata szükséges. Az intervallumaritmetikán alapuló számítógépes eljárások matematikai bizonyító erejű megbízható eredményeket tudnak adni. Számos, nagy visszhangot kiváltó eredmény született az elmúlt 20 évben. Ezek közül kettő a differenciálegyenletek elméletének és az intervallumaritmetikán alapuló megbízható numerikus eljárások kutatóinak sikeres együttműködéséből jött létre. Az egyik ilyen eredmény Bánhelyi Balázs, Csendes Tibor, Garay Barna és Hatvani László eredménye (2008): elsőként bizonyították, hogy a periodikusan perturbált inga egyenletének megoldása kaotikus. Bánhelyi Balázs, Csendes Tibor, Krisztin Tibor és Arnold Neumaier (2014, [25]) egy nevezetes egyenletre ért el áttörést E. M. Wright egy 1955-ös problémájának vizsgálatában, és eredményük a sejtés végső bizonyításában is alapvető szerepet játszott.

Operátorelmélet, funkcionálanalízis. Számos kvantum-információelméleti motiváltságú eredmény született az operátoralgebrák területén. Petz Dénes M. Ohyával közösen megírta nagy hatású monográfiáját a kvantumentrópiákról [175]. Bevezette a kutatásokat jelentősen befolyásoló, számos korábbi entrópia fogalmat általánosító kvázi-entrópia fogalmát. F. Hiaival közösen megmutatták, hogy az Umegaki-féle kvantum relatív entrópia megkapható a klasszikus relatív entrópiák aszimptotikus határértékeként, valamint bebizonyították a kvantum Stein-lemmát, ami az Umegaki-féle relatív entrópia kvantumhipotézisvizsgálatban betöltött megkülönböztetett szerepét (aszimptotikus hibakorlát) mutatja. Petz Dénes és F. Hiai nagy hatású monográfiája [126] a szabad entrópia fogalmát köti össze a nem kommutatív valószínűség, az operátoralgebrák és véletlen mátrixok elméleteivel.

A. Jenčovával közös munkájukban [133] általános Neumann-algebrákra és állapotok tetszőleges halmazára vonatkozóan összekötötték az elégségesség kvantumstatisztikai fogalmát annak klasszikus szorzatfelbontásos karakterizációjával.

Molnár Lajos a Wigner-tételhez talált egy általános algebrai megközelítést, és ennek folyományaként számos ilyen jellegű tételt igazolt különböző struktúrákra vonatkozóan. Javarészt az ő eredményei hatására az ún. megőrzési problémákkal kapcsolatos vizsgálatok iránya megváltozott, a korábbi lineáris vizsgálatok után a nemlineáris kérdések kerültek előtérbe. Operátoralgebrák és függvényalgebrák algebraizomorfizmusainak nemlineáris karakterizációit adta, valamint operátoralgebrák pozitív definit kúpjának különféle szimmetriáit határozta meg [172]. E vizsgálati körbe tartozik Gehér Györgynek P. Šemrllel közös eredménye [99], amelyben pontos leírását adták a Hilbert-tér valamennyi Grassmann-sokasága izometriacsoportjának.

Pálfia Miklós fontos eredményeket ért el az operátorközepek területén. Kiterjesztette a Kärcher-közepek és a Kubo–Ando-közepek elméletének jelentős részét két változó esetéről akárhány, sőt a pozitív definit operátorok kúpján értelmezett valószínűségeloszlások esetére.

Kérchy László C. Foiasszal és H. Bercovicivel új, jelentősen kibővített kiadását publikálta C. Foias és Szőkefalvi-Nagy Béla világhírű, a Hilbert-terek operátorainak harmonikus analíziséről szóló monográfiájának [209].

Függvényegyenletek. Ez irányban Daróczy Zoltán és Páles Zsolt vezetésével intenzív kutatások folytak. A középértékek elméletében a kváziaritmetikai közepekről ismert

eredmények által motiválva a középértékek általánosabb osztályaiban sikerült a jellemzési, egyenlőségi, homogenitási, összehasonlítási és invarianciaproblémákat megoldani, továbbá a Minkowski-, Hölder- és Hardy-típusú egyenlőtlenségek szükséges és elegendő feltételeit megtalálni.

Ugyancsak áttörés történt a függvényegyenletek regularitáselméletében (Járai Antal): függvényegyenletek tág osztályaiban sikerült kimutatni, hogy a gyengén reguláris megoldások (pl. Lebesgue-mérhető vagy Baire-tulajdonságú megoldások) magasabb rendű regularitási tulajdonságokkal (pl. folytonosság, differenciálhatóság, analitikusság) bírnak [131]. Ezek az eredmények lehetővé teszik, hogy a függvényegyenletek megoldását a differenciálegyenletekére lehessen visszavezetni.

Topologikus csoportok fontos osztályain sikerült Laczkovich Miklósnak, Székelyhidi Gábornak és Székelyhidi Lászlónak jellemezni a spektrálanalízis és a spektrálszintézis teljesülésének feltételeit, azaz, hogy a struktúrán értelmezett folytonos függvények eltolásinvariáns zárt altereiben mikor léteznek, illetve mikor vannak sűrűn az ún. exponenciális polinomok. Ezek az eredmények a lineáris függvényegyenletek megoldásához adnak hatékony eszköztárat. Székelyhidi László több monográfiát írt a spektrálszintézissel kapcsolatos kérdésekről [205], [207]. Új kutatási irány a függvényegyenletek, illetve a harmonikus analízis vizsgálata hipercsoportokon [206].

Egyváltozós komplex függvénytan. Több különböző jellegű feltétel garantálja, hogy a hatványsorral előállított függvény sehol sem folytatható analitikusan a sor konvergenciakörén túl: hézagfeltétel, azaz ha a sornak csak ritkán vannak nullától különböző együtthatói (Fabry tétele); ha az együtthatók egy véges halmazból valók, kivéve, ha nagyon szabályosan (periodikusan) vannak elrendezve (Szegő tétele); véletlenül, egymástól függetlenül választva az együtthatókat, nagy valószínűséggel (Paley–Zygmund tétele). Mármost ezeknek van közös általánosításuk.

A Fabry- és a Paley–Zygmund-tételre ezt korábban Szegedy Mária mutatta meg: az utóbbiban az együtthatók egy ritka sorozatát tetszőlegesen, a többitől függően is megválaszthatjuk.

Későbbi eredmény (Halász Gábor 1993), hogy Szegő tételében is megengedhetők ritka (a Fabry-féle hézagoknál kicsit szigorúbb értelemben vett) kivételek, a kivételes helyeken tetszőleges együtthatókkal. Pólya sejtése, miszerint ez Fabry-hézagokkal is igaz, még nyitva maradt.

Hatványsorok nem-folytathatóságával rokon tulajdonság, ha abból, hogy a konvergenciakör kis ívén L_p-beliek, következik ez a teljes körvonalon. Wiener klasszikus tétele szerint ez a tulajdonság is hézagfeltétel következménye a $p = 2$ esetben. Erdős és Rényi véletlen konstrukcióval megmutatták, hogy $p > 2$ esetén ez nem igaz; $p > 6$-ra Turán explicit konstrukciót is adott. Az a meglepő helyzet, hogy $p = 2$ az egyetlen kitevő, amelyre Wiener tétele érvényes: Révész Szilárd (2008) külföldi társszerzőjével együtt minden $p < 2$ esetére is talált ellenpéldát [43].

A komplex polinomok a Riemann-gömbön értelmezett meromorf függvényeknek tekinthetők. A tóruszon értelmezett meromorf függvények pedig nem mások, mint az elliptikus függvények. A polinom fokának az elliptikus függvény rendje felel meg. Ahogy

a klasszikus esetben ezt a Lagrange-interpoláció megteszi, most a rendet szeretnénk minimalizálni. Könnyű a minimális rendet meghatározni, ha az interpoláló függvényt az interpolálandó értékek lineáris kifejezésével akarjuk megkapni. Nemlineáris eljárással azonban a rendet 1-gyel, de nem többel, tovább lehet csökkenteni. Biró Andrásnak 2008-ban sikerült azt is kiderítenie, hogy pontosan mikor nyerhetünk a renden még 1-et. Sejthető, hogy az interpolációs adatok többségére a rendet körülbelül a felére lehet csökkenteni. A tórusz szemléletesen egy gömbre ragasztott fül; érdekes jelenségek várhatóak több fülű Riemann-felületeken is.

A Turán-féle hatványösszegmódszer legszebb – ha nem is a legfontosabb – problémája tiszta hatványösszegek alsó becslése volt, a tagok abszolút értékének a maximumát 1-re normálva. Turán sejtését, nevezetesen, hogy alsó becslésként pozitív abszolút konstans is választható, 20 évre rá bebizonyították komplex függvénytani úton. Biró András (1994) „elemi", azaz komplex függvénytant nem is használó utat talált, az ismert konstanst egyidejűleg megjavítva. Ez az elemi út segítette hozzá, hogy felső becslésként 1-nél kisebb abszolút konstanst bizonyítson (2000) [35]; 1 a triviális felső korlát, a korábbi felső becslések a tagok számát növelve nagyon gyorsan tartottak ehhez a triviális korláthoz.

Többváltozós komplex függvénytan. Némethi András és Sigray István [174]-ben a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ nem konstans polinom leképezés generikus fibruma kohomológiájának dimenzióját számolta ki. Ennek alkalmazásaként a kétváltozós Jacobi-sejtéssel kapcsolatos egyik ismert eredményt általánosították n változósra. Eszerint, ha $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ és $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ olyan polinom leképezések, amelyekre f generikus fibruma racionális, és mindegyik fibrum irreducibilis, akkor az $(f,g)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ Jacobi-feltételt kielégítő polinom leképezés bijektív.

A kétváltozós Jacobi-sejtéshez kapcsolódik, de egyváltozós kérdést vizsgál Sigray a [197] cikkben, melyben a $kp'q - lpq'' = cp^m$ polinomiális differenciálegyenlet megoldásait írta le kombinatorikus eszközzel.

Minden M kompakt Riemann-szimmetrikus tér esetén M érintőnyalábján létezik komplex struktúráknak egy természetes családja [155]. A geometriai kvantálás módszere alapján minden adott komplex struktúra meghatároz egy Hilbert-teret (egy bizonyos holomorf vonalnyaláb holomorf L^2 szeléseinek terét), az ún. kvantum-Hilbert-teret. A geometriai kvantálás egyik alapkérdése, hogy az így kapott Hilbert-terek kanonikusan izomorfak-e (egyértelmű-e a kvantálás). Ennek a kérdésnek a vizsgálatához vezette be Lempert és Szőke a Hilbert-nyalábok egy általánosítását, a sima ill. analitikus Hilbert-mező fogalmát [156] (korábban von Neumann definiálta a mérhető, ill. Godement [101] a folytonos Hilbert-mező fogalmát). Az egyértelműség azzal egyenértékű, hogy a kapott Hilbert-mező görbülete nulla. Többek között belátták, hogy ha M egy kompakt Lie-csoport ellátva egy biinvariáns metrikával, akkor M kvantálása egyértelmű. Később Szőke [208] megmutatta, hogy ha az M kompakt szimmetrikus tér nem egy Lie-csoport, akkor a kvantálás függ a komplex struktúra megválasztásától.

Tóth Árpád és Dror Varolin két cikkben [212, 213] vizsgálták komplex féligegyszerű Lie-csoportok, ill. bizonyos homogén terek biholomorfizmusainak csoportját. Ezen csoport fontos tulajdonságait igazolták, kiterjesztve Lempert és Andersén [13] $\mathbb{C}^n$-re vonatkozó eredményeit ezekre a geometriai objektumokra.

Valós analízis, mértékelmélet, leíró halmazelmélet. Három területen is születtek kiemelkedő eredmények: a valós függvénytan, a geometriai mértékelmélet és a leíró halmazelmélet témáiban. A valós függvénytani kutatásokat Riesz Frigyest követve Császár Ákos folytatta az 1950-as években. Ezeket a kutatásokat Petruska György és Laczkovich Miklós újították meg az 1970-es és 1980-as években. Az általunk vizsgált periódusból megemlítjük Laczkovich Miklós kutatásait a differenciatulajdonság témaköréből, amelyet Erdős Pál egy problémája indított el 1950 körül. Ezen eredmények összefoglalásaként született meg egy témát összefoglaló dolgozat 2002-ben [154].

Tarski 1924-ben megfogalmazott ún. környégyszögesítési problémájának megoldása, amely szerint azonos mértékű korlátos halmazok mindig átdarabolhatóak egymásba ha a halmazok határa kicsi, nagy visszhangot váltott ki (Laczkovich Miklós [153]). Ezt az eredményt csak 27 évvel később haladta meg a tudomány: L. Grabowski, Máthé András és O. Pikhurko 2017-ben belátták, hogy az átdarabolás Lebesgue-mérhető részekkel is megtehető [105]. Ezt még abban az évben Borel-mérhető részekre javította A. Marks és S. Unger. A közelmúltban Máthé András és szerzőtársai bejelentették, hogy az átdarabolás Jordan-mérhető részekkel is lehetséges.

A Banach-terek nullhalmaz-fogalmainak tisztázása (Csörnyei Marianna 1999) a Banach-terek elméletének nagy fontosságú felfedezése volt, amely azonnal belekerült a témát tárgyaló legfontosabb monográfiába. Ugyancsak régi és hírhedten nehéz problémát oldott meg Buczolich Zoltán 2005-ben az ún. gradiensprobléma megoldásával, amely a többváltozós függvények deriváltjainak szerkezetéről nyújt információt [47]. Szintén Buczolich Zoltán nevéhez fűződik (D. Mauldinnal közösen) Bourgain problémájának megoldása a négyzetszámokon vett ergodikus közepekről (2010) [48].

Az utóbbi években Elekes Márton és Keleti Tamás vezetésével egy leíró halmazelméletet, illetve egy geometriai mértékelméletet kutató csoport kezdett formálódni. E kutatócsoportok részben a vizsgálatok új irányait nyitották meg, részben a témakörök nehéz nyitott problémáit célozzák meg. Látványos eredményeik közé tartoznak az adott távolságot elkerülő halmazok dimenziójára vonatkozó eredmények [138], a Baire-féle függvények rangjának bevezetése az összes Baire-osztályra [72], vagy a véletlen automorfizmusok struktúráinak vizsgálata [63].

(Szerkesztette: Laczkovich Miklós)

4. Geometria és topológia

A geometria a matematika talán legnagyobb hagyományú területe, alapkérdéseinek vizsgálata az ókortól kíséri és határozza meg a matematika történetét. A huszadik század elején a tudományág újabb fejezettel bővült: a topológia a terek még alapvetőbb (nyújtás során sem változó) tulajdonságait vizsgáló diszciplínaként vált korunk egyik fontos irányzatává.

A matematika fejlődésével a különböző tudományterületek közötti határok mindinkább eltűnnek, és kialakulnak olyan kutatási irányok, amelyek több hagyományos kérdéskörből merítenek, és az alkalmazott technikák egymástól is látszólag távolálló

gondolatokra épülnek. Szép példája ennek a diszkrét (vagy kombinatorikus) geometria kialakulása, amely számos gráfelméleti és algoritmikus kérdést helyez geometriai kontextusba, és alkalmaz így új eszközöket azok megoldásában. A magyar matematika több nagy sikere is ezen témakör kérdéseinek megoldásához kapcsolódik.

A fentiekhez hasonlóan a topológiai kutatások is több témakörre hatottak megtermékenyítő módon, és más diszciplínák (pl. komplex függvénytan, végtelen dimenziós analízis, homologikus algebra) eredményei leltek alapvető alkalmazásra topológiai kérdések megválaszolásában.

Alább az elmúlt néhány évtized egy-egy jelentősebb, magyar kutatók által elért geometriai és topológiai eredményét idézzük fel.

Diszkrét geometria. Lovász kérdezte, hogy milyen pontossággal lehet meghatározni (effektív algoritmus segítségével) egy d-dimenziós konvex halmaz térfogatát. Elekes korábbi eredményét javítva Bárány és Füredi megmutatták, hogy minden ilyen determinisztikus algoritmus szükségképpen nagy, méghozzá $(cd/\log d)^d$ nagyságú multiplikatív hibával dolgozik. Részben emiatt kezdődött a véletlen, Markov-láncokon alapuló térfogatmérő algoritmusok vizsgálata (Dyer, Frieze, Kannan), amelyet Lovász, Simonovits-csal, Kannannal, és Vempalával fejlesztett tovább. A fő eredmény szerint polinomidejű véletlen algoritmussal nagy valószínűséggel és nagyon pontosan meg lehet határozni egy d-dimenziós konvex test térfogatát. A Kannan, Lovász, Simonovits eredmény több izgalmas geometriai kérdést vet föl, és jó néhányat meg is old. Például, hogy a híres Loewner–John-féle koncentrikus ellipszoid-pár megválasztható úgy is, hogy az ellipszoidok középpontja egybeessen a konvex halmaz súlypontjával.

Ramsey tétele szerint ha F a d-dimenziós térben lévő geometriai objektumok egy n elemű családja, és n elég nagy, akkor F-nek van két olyan nagy (legalább $\log n$ elemű) részcsaládja, mondjuk G és H, hogy vagy bármely G-beli és H-beli halmaz metszik egymást, vagy bármely G-beli és H-beli halmaz diszjunkt. Kérdés, hogy lehet-e sokkal nagyobb, cn méretű ilyen G-t és H-t találni (ahol $c > 0$ alkalmas konstans). A válasz az, hogy igen, ha az F-beli geometriai halmazok nem túl bonyolult algebrai formulákkal vannak megadva. Ezt a nagyon érdekes és hasznos Ramsey-típusú geometriai eredményt Pach János bizonyította (társszerzőkkel) 2005-ben.

A $[0, n]^2$ négyzetben természetesen csak véges sok konvex rács-sokszög van, számuk $\exp\{3\sqrt[3]{16\zeta(3)/\zeta(2)}n^{2/3}(1 + o(1))\}$, ami szép nagy szám. Hogy néz ki ennek a nagy halmaznak a tipikus eleme, és van-e egyáltalán tipikus eleme? Egyszerűbb ugyanezt a kérdést a $[0, 1]^2$ négyzetben vizsgálni, csak a szokásos Z^2 rács helyett az $\frac{1}{n}Z^2$ rácsot tekintjük. Az itteni rács-sokszögeknek akkor *határalakja* a K konvex halmaz, ha a sokszögek túlnyomó többsége nagyon közel van K-hoz. A határalak-tétel (Bárány Imre eredménye) azt mondja ki, hogy van ilyen K, és hogy K-t négy parabolaív határolja. Akkor is van határalak, ha a kiinduló halmaz nem az egységnégyzet, hanem egy kompakt, konvex és nemüres belsejű síkbeli C halmaz. Ugyanaz a határalak jön ki akkor is, ha a rács helyett egy n elemű véletlen X_n mintát vesszük, és a rács-sokszögek helyett az összes olyan konvex poligont tekintjük, amelynek csúcsai X_n-ben vannak.

Alacsony dimenziós topológia. Csomók, vagyis a háromdimenziós térbe beágyazott körvonalak tanulmányozása a topológia egyik legrégebbi, hagyományos területe. A kö-

zelmúlt eredményei közül kiemelkedik Ozsváth és Szabó csomókkal kapcsolatos Floer-homológiája, amely egy polinomgyűrű feletti modulust rendel minden csomóhoz, és ezen modulus algebrai struktúrájából a csomó jó néhány fontos tulajdonsága leolvasható. 2017-ben Ozsváth, Stipsicz és Szabó a korábbi konstrukció egy deformációjával minden K csomóhoz egy új folytonos, szakaszonként lineáris függvényt, a csomó Υ_K Üpszilon függvényét adta meg. Υ_K egy csomóinvariáns, és meglepően sok új ismerettel gazdagította a csomó konkordizmusok elméletét. Ráadásul Υ_K sok esetben aránylag könnyen ki is számítható.

Szingularitások topológiája. Az algebrai vagy komplex analitikus terek szingularitásainak elmélete kulcsfontosságú a modern matematikában. Némethi András a komplex felület-szingularitások tanulmányozása kapcsán egy új kohomológia elméletet vezetett be, a „rácspont kohomológiát", amely összekapcsolja a szingularitás algebrai/analitikus invariánsait a szingularitás csomójának alacsony dimenziós topológiájával, továbbá összeköthető a csomó Ozsváth és Szabó által bevezetett Floer-homológiájával is. Némethi bizonyította, hogy (a matematika különböző ágaiban megfogalmazott) következő állítások egyenértékűek: (i) a szingularitás racionális (ami egy bizonyos kéve-kohomológia eltűnésének felel meg), (ii) a csomó rácspont-kohomológiája triviális, (iii) a csomó Floer-homológiája triviális, (iv) a csomó fundamentális csoportján nincs egy balinvariáns teljes rendezés.

Leképezések és klasszifikáló terek. Az algebrai topológia egyik legfontosabb fogalma a homotópikus csoport. A gömbök homotópikus csoportjainak kiszámolására Pontrjagin 1942-ben egy geometriai módszert talált. Tíz évvel később Thom Fields-érmes munkájában ezt a kapcsolatot általánosította, és az alkalmazás irányát megfordította, differenciálható sokaságok osztályozását (kobordizmus csoportjának kiszámolását) vezette vissza algebrai topológiára. Szűcs több évtizedet foglalkozott (részben egyedül, részben tanítványai, Rimányi Richárd és Terpai Tamás segítségével) a Pontrjagin–Thom-konstrukció általánosításával differenciálható sokaságok különböző leképezésosztályainak a leírására. A különböző leképezésosztályokon azt kell érteni, hogy megadjuk lokális vagy globális szingularitások egy osztályát, és klasszifikálni akarjuk az ilyen típusú leképezéseket. (Klasszifikáción az ilyen típusú leképezések kobordizmuscsoportjának kiszámolását értjük.) Ehhez a Thom által megépített klasszifikáló teret kellett általánosítani minden egyes ilyen leképezésosztályra, és ezek homotópikus csoportjait kiszámolni. Ezek a klasszifikáló terek koncentrált formában leírják az adott típusú szinguláris leképezések viselkedését. Ezek segítségével sok esetben sikerült az ilyen leképezések teljes vagy részleges klasszifikációját elvégezni (azaz kiszámolni a megfelelő kobordizmuscsoportot). 2018-ban Terpaival közös cikkükben expliciten sikerült kifejezni azt, hogy leképezések egyszerűbb típusú szinguláris pontjainak halmazai hogyan csavarodnak a bonyolultabb szinguláris pontok körül. Ezt a csavarodást a gömbök homotópikus csoportjának egy eleme adja meg minden esetben.

Egzotikus gömbök. Az 1960-as évek két nagy érdeklődést kiváltott eredménye az ún. egzotikus gömbök (a gömbbel homeomorf, de nem diffeomorf terek) létezésének felfedezése, ezek osztályozása egyfelől, és a standard gömb euklideszi térbe menő immerzióinak osztályozása másfelől. Ekholm svéd matematikussal közös dolgozatában Szűcs összekapcsolta ezt a két problémakört, és kiszámolta az összes gömbbel homeomorf tér euklideszi

térbe menő immerziói által alkotott csoportot.

(Szerkesztette: Bárány Imre, Némethi András, Stipsicz András, Szűcs András)

5. Halmazelmélet és logika

Az ötvenes évektől egy igen aktív, Erdős Pál, Hajnal András és Richard Rado vezetésével működő végtelen kombinatorikai iskola jött létre. Számos, a mai napig alkalmazott eredményüknek nagy nemzetközi hatása lett, sokszor a témát „magyar halmazelmélet"-nek is nevezik.

Hajnal András [124] cikkében bebizonyítja, hogy Ramsey tétele teljesül, ha éleket színezünk, és feszített véges egyszínű gráfot kívánunk, a színek száma pedig akármilyen végtelen számosság. Az állítás konzisztensen hamis, ha megszámlálhatónál nagyobb célgráfot engedünk meg (Hajnal–Komjáth), a megszámlálható célgráf esete nyitott.

Erdős kérdését megválaszolva Komjáth belátta, hogy az n-dimenziós euklideszi tér kiszínezhető megszámlálható sok színnel úgy, hogy nincs két egyszínű pont nemnulla, racionális távolságban ([141]).

Komjáth és Shelah [142]-ben megcáfolta Taylor sejtését, példát adva a halmazelmélet olyan modelljére, ahol van $\aleph_1$-kromatikus gráf, amelyre minden gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, legfeljebb $\aleph_2$-kromatikus. Az eredeti sejtés szerint, ha a G gráf kromatikus száma megszámlálhatónál nagyobb, akkor minden λ számosságra van olyan H gráf, hogy H kromatikus száma legalább λ, és H minden véges részgráfja előfordul G-ben.

A Komjáth és Totik által készített [143] nagysikerű feladatgyűjtemény a halmazelmélet elemi fejezeteit dolgozza fel.

Az „általános" topológia magyarországi kutatásait Császár Ákos alapozta meg több nyelven megjelent monográfiájával (magyarul *Bevezetés az általános topológiába* címmel jelent meg 1971-ben). Császár Ákos számos cikkben vizsgálta az általános topológia különböző alapvető fogalmainak legáltalánosabb variánsait.

A modern halmazelmélet talán legsikeresebb alkalmazásaival jött létre a halmazelméleti topológia. Ebben topologikus terekhez rendelhető számosságinvariánsok tulajdonságait, köztük levő összefüggéseket vizsgálnak a halmazelmélet sokszor egészen kifinomult módszereivel. A téma alapvető monográfiáját Juhász István írta 1971-ben, és a téma összefoglalása a *Handbook of Set-theoretical Topology* című kézikönyvben is tőle származik [134], [135]. Hajnal András és Juhász István vezetésével létrejött, és a Rényi Intézetben a mai napig működik egy elsősorban ezzel foglalkozó, külföldön is erősen elismert kutatócsoport.

Gyenis Zalán modális logikával foglalkozó cikke ([114]) 2018-ban Tarski-díjat kapott.

6. Kombinatorika

A kombinatorika a magyar matematika egyik legsikeresebb ága. Felsorolunk három kiemelkedő nemzetközi elismerést: a Nobel-díj mintájára alapított matematikai díjat (az Abel-díjat) 2012-ben Szemerédi Endre vehette át V. Harald norvég királytól, 2021-ben Lovász László volt az egyik díjazott; az 1990 és 2018 között tartott nyolc Matematikai Világkonferenciára (ICM, International Congress of Mathematicians) a 15 magyar és Magyarországon is dolgozó meghívottból 7-nek a fő kutatási területe a tágan értelmezett kombinatorika, 2018-ban Lovász László (MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete), Barabási Albert-László (Közép-Európai Egyetem, CEU) és Jaroslav Nešetřil (prágai Károly Egyetem) együttműködésében egy hatéves kutatási programra 9,8 millió eurós ERC Synergy Grant pályázatot nyert el.

E magyar sikereknek természetesen sok évtizedes előzményei vannak. Farkas Gyula (1888 és 1915 között a kolozsvári Tudományegyetem tanszékvezetője), Kőnig Dénes (1884–1944), Turán Pál (1910–1976) és Erdős Pál (1913–1996) a modern kombinatorika világszerte elismert megalapozói között voltak.

A XX. század közepétől egyre gyorsuló informatikai és technikai forradalom sorra szállítja az újabb és újabb megoldandó matematikai problémákat. Ezen belül a kommunikáció, a számítógépek, a nagy adatbázisok kezelése, a gazdasági döntések előkészítése elengedhetetlenné tették számos, a kombinatorikához is ezer szállal kötődő diszciplína létrejöttét, mint pl. az információelmélet, kódelmélet, játékelmélet, matematikai programozás, algoritmusok, hálózatok tudománya, adatbányászat, számítógépes és diszkrét geometria, diszkrét optimalizálás. Az utóbbi fél évszázadban több ezer év matematikai eredményeit kellett újra megvizsgálni a kiszámíthatóság, az észszerű algoritmus (számítógépprogram) szempontjából.

A kombinatorika tulajdonképpen csak a legutóbbi 30 évben lett az elméleti matematika elismert ága és univerzális problémamegközelítési eszköze. Az első Fields-érmet csak 1998-ban adták kombinatorikai kutatásokért, illetve azokért *is*. Egyfelől, míg a század közepén gyakran mérnökök, fizikusok, közgazdászok voltak kénytelenek fontos diszkrét matematikai megoldásokat, algoritmusokat keresni, addig az 1990-es évekre a kombinatorika kitört a rekreációs matematika, illetve az alkalmi trükkök gyűjteményének szerepéből. A modern kombinatorika a matematika számos új és mély eredményét alkalmazza (algebra, geometria, topológia, valószínűségszámítás), egy mai sikeres kombinatorikusnak ugyanúgy komoly elméleti tudásra van szüksége, mint egyéb tudós kollégájának. Másfelől, a diszkrét matematikai gondolkodásmód és eredményei elterjedtek és megtermékenyítően hatnak a tudomány más területeire is (pl. statisztikus csoportelmélet).

Az alábbiakban ismertetjük a magyar matematikusok kombinatorikában a legutóbbi 30 évben elért legnagyobb hatású kutatásait.

Erdős Pál hatása felmérhetetlen. Ő vezette be a véletlen (nemkonstruktív) módszert, lényeglátó problémák és fogalmak tucatjait vetette fel. Még élete végén is írt olyan (1998-ban megjelent) cikket [42], amelyre az igencsak szelektíven válogató Mathematical Reviews is több mint 100 hivatkozást tart nyilván.

Szemerédi-regularitás. Az egyik legfontosabb fejlemény, hogy az 1978-ban publikált Szemerédi-lemma alkalmazásai, változatai elterjedtek, a kombinatorika egyik alapeszközévé váltak, továbbfejlődtek, és már ritka gráfokra és hipergráfokra is alkalmazhatóak. Ismertetjük e folyamat néhány lépését.

A lemma egy diszkrét approximációs eljárás, már a kimondásához is szükségünk van a kvázivéletlenség ismeretére, és alkalmazása a problémák mély megértésén túl jelenős kitartást és technikai ügyességet kíván. Eleinte még kisebb szenzációnak számított, hogy nemcsak aszimptotikákra, hanem pontos eredmény elérésére is alkalmas (pl. a 2-átmérőjű gráfokra vonatkozó Caccetta–Häggkvist/Murty–Simon-sejtés bizonyítása $n > n_0$ esetére, Füredi [88] 1992). Nagy segítség Komlós János, Sárközy Gábor és Szemerédi Endre ú.n. *Blow-Up lemmája* [144] (1997) és annak algoritmikus változata [145] (1998), amivel úrrá lehetünk a technikai nehézségek jelentős részén, és amely erősen hozzájárult a regularitás elterjedéséhez és mindennapi alapeszközzé válásához.

A Blow-Up lemma legsikeresebb alkalmazója Sárközy Gábor és Szemerédi Endre. Kiemelkedő sikerük az Alon–Yuster-sejtés igazolása (Komlós Jánossal [146], 2001) ami egy beágyazási tétel és amit sok hasonló követett. Pl. az alábbi két nagyhatású cikk: Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy G., és Szemerédi [109] (2007) utak három színezett Ramsey-gráfjairól, és Rödl, Ruciński, Szemerédi [191] (2008), amelyben ifj. Katona Gyula és Kierstead (1999) egy Dirac-típusú sejtését igazolják aszimptotikusan hipergráfok Hamilton-köreiről.

A regularitást *ritka gráfokra* alkalmazva Hladký, Komlós, Piguet, Simonovits, Stein, és Szemerédi [127] egy 4 részes, összesen több mint 200 nyomtatott oldalon egy monumentális, végtelenül összetett, virtuóz bizonyítást adott a Loebl–Komlós–Sós-sejtés aszimptotikus változatára. Ez az eredmény nagyon közel van a fák Turán-számáról szóló nevezetes Erdős–Sós-sejtéshez.

A regularitási lemma szisztematikus alkalmazásai továbbra is termékeny terület, a fentieken kívül említendő még Csaba Béla és Hajnal Péter munkássága.

A *hipergráf regularitás* megalkotásában az első áttörést Frankl és Rödl 3-uniform rendszerekről szóló két cikke hozta [84] (1992, 2002). (Frankl Péter 1998 óta az MTA külső tagja, évtizedek óta a Rényi Intézet külső munkatársa és, hasonlóképp Bollobás Bélához, egyik *támogatója*).

Gráflimesz. Az elmúlt 30 év legnagyobb teljesítménye a nagy hálózatok tanulmányozásából kinőtt gráflimesz fogalom. Lovász László 2012-ben egy nagyhatású könyvben [158] foglalta össze a tanítványai (többek közt Szegedy Balázs) és munkatársai (a magyarok közül T. Sós Vera, Vesztergombi Katalin) közreműködésével elért eredményeket [44, 45, 46]. Egyéb véges struktúrák limeszének vizsgálata is a modern kutatások fókuszába került. Előzményként kiemelendő egy önmagában is nagyon fontos téma, a kvázivéletlen struktúrák elmélete, amelynek kidolgozói közül megemlítendő T. Sós Vera és Simonovits Miklós [200]. Eredményeik a Property Testing témájában is alapvetőek.

Jelenleg ezen eredmények (a graphonok és graphingok) tulajdonságainak kiterjesztése folyik a sűrű, a ritka és középsűrű struktúrákra. Ezek nagyon különböző és egymástól jól elkülönülő kutatási témák, amelyek figyelemre méltó módon összefüggenek a mester-

séges intelligenciát alkotó hálózatok kutatásával. A fent említetteken kívül a legkiválóbb magyar művelői: Backhausz Ágnes, Elek Gábor, Frenkel Péter, Abért Miklós.

Gráfok es hipergráfok Turán-száma. Minden tudománynak, a matematika minden ágának fontos feladata a részstruktúrák leírása. Központi kérdés, hogy a lokális tulajdonságok hogyan befolyásolják a globális paramétereket. A kombinatorikában az ilyen problémákat általában Turán-típusú kérdéseknek nevezzük. Az utolsó 30 évben itt is jelentős áttörések születtek, új jobb randomizált felső becslések és szép algebrai konstrukciók. Említendő Füredi két 1996-os cikke [89], amelyben aszimptotikát kapunk a $K(3,3)$ és a $K(2,t)$ páros gráfokra. Kollár János, Rónyai Lajos és Szabó Tibor [140, 12] (1996 és 1999) az algebrai konstrukciók egy új generációját használva (norma gráfok) meghatározták végtelen sok teljes páros gráf Turán-számának nagyságrendjét. Azóta a magasabb algebrai eszközök bekerültek a kombinatorika sztenderd eszköztárába, többek közt Elekes György [71], Károlyi Gyula, és Pach Péter Pál [52] munkásságának köszönhetően.

Az első nem triviális hipergráf Turán-limitjének kiszámítását (miszerint a Fano-síkra $\pi(F_7) = 3/4$, Füredi és deCaen [49], 2000) két továbbbi sporadikus eredmény követte (Füredi, Pikhurko és Simonovits [91] 2003, 2005) ugyanazzal a linkgráf módszerrel. Mások is bekapcsolódtak (pl. Mubayi, Keevash, Rödl, Sudakov), ami végül a Razborov-féle (2007) flag-algebra módszerhez vezetett, és elindította a téma azóta is tartó virágzását. Valójában már az első cikkekben is ott voltak a módszer alapelemei: részgráfok súlyozott leszámlálása kombinálva pozitív szemidefinit programozással.

Részben e kérdések vezettek egy újonnan felfedezett leszámlálási módszerhez (csontainer'-ek) aminek egyik mestere Balogh József (egy korai eredmény Bollobással és Simonovits-csal: [24]).

Rendezett struktúrák Turán-száma. Ez természetesen adódó, de nagyon nehéz és bonyolult téma. Tardos Gábor, Adam Marcussal közösen [162] (2005) bizonyították Füredi Zoltán és Hajnal Péter egy sejtését, és ezzel a vele ekvivalens sokat vizsgált Stanley—Wilf-sejtést is. Tardos és Pach [176] (2006) dolgozata alapvető, és megújította a rendezett részstruktúrák extremális elméletét.

Természetesen a magyar kombinatorika ennél sokkal több. Pl. Gyárfás András továbbra is a klasszikus *partícióproblémák* (Ramsey-tétel, színezések, fedések) nemzetközileg elismert vezető kutatója. Befejezésül néhány további iskolateremtő kutatót említünk, akik eredményeikkel, tanítványaikkal nemzetközileg is elsőrangú kutatásokat folytatnak: Katona Gyula és Győri Ervin (extremális halmazrendszerek), Szőnyi Tamás (véges geometriák), Tuza Zsolt (gráfok, hipergráfok), Frank András (kombinatorikus optimalizálás), tanítványai közül Fleiner Tamás és Jordán Tamás említendő (akik az alkalmazásokban igen fontos különféle stabilitási és merevségi problémákkal foglalkoznak), Bárány Imre (konvex alakzatok kombinatorikája), Pach János (a robotikában és a számítógépes grafikában is alkalmazható diszkrét geometria).

(Szerkesztette: Füredi Zoltán, Rónyai Lajos és Simonovits Miklós)

7. Számelmélet

Az Erdős Pál és Turán Pál által kezdeményezett magyar számelméleti kutatások immár csaknem 100 éve folynak magas színvonalon, amelyeket nemzetközi és hazai elismerések, díjak sora övez. Jelenleg is az MTA tíz rendes tagja foglalkozik döntően vagy részben számelméleti kutatásokkal. A külföldi elismerések közül a legnevesebbek a norvég akadémia Abel-díja, az Amerikai Matematikai Társulat Leroy P. Steele-díja és a svéd akadémia Rolf Schock-díja (Szemerédi Endre), továbbá nagy hagyományú az Amerikai Matematikai Társulat 90 éve alapított Cole-díja (Pintz János). Az Európai Tudományos Tanács (ERC) 2008 óta 21 magyar kutatónak odaítélt Advanced Grant kutatási díját két ízben nyerték el magyar kutatók (legalább részben) számelméleti projekttel (Pintz János, ill. Szemerédi Endre). Az utóbbi 30 évben két számelméleti témájú előadásra kért fel a Nemzetközi Matematikai Unió négyévente megrendezett kongresszusán magyar kutatókat, Pintz Jánost és Ruzsa Imrét. Az Európai Akadémia (Academia Europaea) 201 matematikus tagja közül öt magyar kutató foglalkozik részben vagy egészben számelmélettel (Győry Kálmán, Pintz János, Ruzsa Imre, Szemerédi Endre, T. Sós Vera). A Lengyel Tudományos és Művészeti Akadémia Győry Kálmánt, az Amerikai Tudományos Akadémia és a Norvég Tudományos és Művészeti Akadémia Szemerédi Endrét választotta tagjai közé. A hazai elismerések közül kiemelkedő a Szemerédi Endrének adományozott Magyar Érdemrend Nagykeresztje és a Szent István-rend, de szintén nagy elismerés a számelméleti kutatásokkal (is) foglalkozó 7 kutatónak odaítélt Széchenyi-díj (Győry Kálmán, Kátai Imre, Pintz János, Rónyai Lajos, Sárközy András, Szemerédi Endre, T. Sós Vera), az Akadémia Aranyérme (T. Sós Vera), és a Prima Primissima alapítvány két Prima-díja is (Pintz János, Szemerédi Endre). A Magyar Érdemrend közép- vagy tisztikeresztjét 5 kutató nyerte el döntően vagy részben számelméleti munkássága alapján (Győry Kálmán, Halász Gábor, Kátai Imre, Pethő Attila, T. Sós Vera). Harcos Gergely vezet egy MTA Lendület kutatócsoportot.

(Szerkesztette: Pintz János)

Analitikus számelmélet: automorf formák. Az automorf formák szimmetriákban gazdag harmonikus hullámok, a különféle harmóniákat L-függvények kódolják el (a legklasszikusabb L-függvény a prímszámok elméletében alapvető Riemann-féle dzétafüggvény). Az automorf formákról és az automorf L-függvényekről szól a számelmélet számos híres és rendkívül nehéz problémája (pl. általános Riemann-sejtés, Ramanujan–Selberg-sejtés, Langlands-program), és rajtuk keresztül kapcsolódik a számelmélet a matematika több, látszólag távol eső területéhez. Az automorf formák értelmezési tartományai érdekes geometriai objektumok, amelyek többek között Abel, Bolyai, Riemann és Klein munkái során kerültek az érdeklődés homlokterébe. Tóth Árpád (külföldi társszerzőkkel) a hiperbolikus síkból származó klasszikus Riemann-felületek zárt geodetikusait vizsgálta, ami többek között a Ramanujan-féle moduláris forma hamisítványok új konstrukcióját és valós kvadratikus számtestek új invariánsait eredményezte. A zárt geodetikusok metszési számainak automorf leírása meglepő hidat alkot a Lorenz-féle dinamikai rendszer és a számelmélet között. Harcos Gergely és Maga Péter (külföldi társszerzőkkel) jelentős eredményeket ért el az automorf formák és automorf L-függvények becslése, illetve a kivételes automorf spektrum leszűkítése terén. Az ilyen típusú becslések ki tudják váltani

az említett mély sejtéseket bizonyos konkrét alkalmazásokban, pl. a zárt geodetikusok térbeli és számbeli eloszlásának vizsgálatában. A számbeli eloszlást leíró prímgeodetikus tételekben fontos javítást ért el Balog Antal, Biró András és Zábrádi Gergely (külföldi társszerzőkkel). A Langlands-program p-adikus kiterjesztése a 2000-es években került előtérbe a modularitási sejtések bizonyítása során. Zábrádi Gergely kapcsolatot létesített p-adikus automorf reprezentációk, illetve Galois-csoportok direkt hatványainak reprezentációi között.

Analitikus számelmélet: kvadratikus számtestek. A kvadratikus számtestek osztályszámának vizsgálata klasszikus téma, Gaussig nyúlik vissza, és máig a számelmélet egyik legfontosabb területének számít, mert összefügg a Riemann-sejtéssel rokon Siegel-gyök problémával.

Az egy osztályszámú testek azért érdekesek, mert ezek állnak legközelebb a racionális testhez: e testekben létezik egyértelmű prímfelbontás. Az imaginárius esetben Gauss-sejtésként véges listát adott az egy osztályszámú testekről, ezt csak az 1950-es, 1960-as években igazolták (Heegner, Baker, Stark). A valós esetről szóló Gauss-sejtés szerint végtelen sok egy osztályszámú test van; ez máig nyitott. De valós kvadratikus testek egyes családjai (ahol a fundamentális egység kicsi) hasonlóak az imaginárius testek családjához. Egy-egy ilyen valós családra Chowla (1976), ill. Yokoi (1986) adott sejtésként véges listát az egy osztályszámú testekről. E sejtések az imaginárius Gauss-sejtés analogonjai voltak. Nehézségüket az adta, hogy esetükben a Heegner–Baker–Stark-tételre ismert bizonyítások egyike sem működött. A Chowla- és a Yokoi-sejtést Biró András (2003) oldotta meg. Bizonyításának fontos előzménye volt Beck József [27] cikke, amelyben részeredményeket bizonyított.

Analitikus számelmélet: prímszámelmélet. Az analitikus számelmélet az egész számok vagy azok általánosításait képező struktúrák oszthatósággal kapcsolatos tulajdonságait vizsgálja az analízis módszereinek segítségével. Egyik legfontosabb területe a prímszámelmélet, amely a prímszámok, azaz a maradék nélkül csak eggyel és önmagukkal osztható, egynél nagyobb számok viselkedését, valamint az egész számok végtelen sorozatában való eloszlását vizsgálja. Az egész számok összeadásra tekintett, ún. additív struktúrája rendkívül egyszerű, minden pozitív egész számot megkapunk, ha az 1-es számot kellőképp sokszor összeadjuk önmagával. A szorzásra tekintett, ún. multiplikatív struktúra már összetettebb, de már 2300 éve jól ismert (bár csak 1801-ben nyert Gauss által egzakt bizonyítást). A prímek atomokként viselkednek, azaz minden 1-nél nagyobb pozitív egész a sorrendtől eltekintve egyértelműen írható fel prímek szorzataként. Ez a számelmélet alaptétele. Ugyanakkor a multiplikatív és additív struktúrák kapcsolatait leíró szinte legegyszerűbb jelenségek is mindmáig bizonyítatlan sejtések. Ilyen pl. a valószínűleg kétezer éves ikerprím-sejtés, amely szerint végtelen sokszor, azaz minden határon túl találunk újabb és újabb ikerprím-párokat, azaz olyan prímpárokat, amelyek különbsége kettő. Az ezredfordulókor még csak azt tudtuk, hogy minden határon túl találunk az átlagos távolság legfeljebb egynegyedénél közelebb eső prímpárokat (ez az átlagos távolság a prímekkel együtt nő, x körüli prímekre az x szám természetes alapú logaritmusa, ami arányos a prím jegyeinek számával). 15 éve Pintz János társszerzőkkel igazolta, hogy ez negyedrész helyett akármilyen kis fix törtrészre is igaz. Egy évtizeden belül az általuk adott módszerek finomításával kínai és angol kutatók, valamint eredmé-

nyeiket továbbfejlesztve egy – két magyar kutatót, Pintz Jánost és Harcos Gergelyt is magában foglaló – nemzetközi kutatócsoport (Polymath8) igazolta, hogy egy abszolút korlátnál, 246-nál nem nagyobb különbség is végtelen sokszor fordul elő, ami hatalmas áttörés az ikerprímsejtés megközelítésében. Egy másik híres sejtés Goldbachtól származik, 1742-ből. Eszerint minden kettőnél nagyobb páros szám előáll két prím összegeként. A sejtést csak száz éve sikerült először megközelíteni. Azóta több különféle, gyakran igen pontos megközelítése létezik, amelyek bizonyításában magyar kutatók is fontos szerepet játszottak. Például Pintz János és Ruzsa Imre igazolta, hogy ha (kissé leegyszerűsítve) egy bármilyen nagy páros számban legfeljebb nyolc bináris jegyet megváltoztatunk, akkor a kapott szám már előáll két prímszám összegeként. Pintz János eredménye egy másik közelítés, mely szerint, ha esetleg léteznek is, igen ritkán fordulnak elő olyan páros számok, amelyek nem írhatók fel két prím összegeként (az x-nél kisebb ilyen páros számok száma legfeljebb x 3/4-ik hatványa).

(Szerkesztette: Biró András, Harcos Gergely és Pintz János)

Diofantikus számelmélet. A modern diofantikus számelmélet a matematika igen dinamikusan fejlődő, számos alkalmazással járó területe, amelynek több mint kétezer éves múltja van. Olyan egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel foglalkozik, melyek megoldásai egész, illetve racionális számok vagy különféle általánosításaik. Az 1970-es évek óta Győry Kálmán vezetésével működik Debrecenben egy tanítványaiból és azok tanítványaiból álló 15–20 fős diofantikus számelméleti kutatócsoport. A leghatékonyabb módszereket általuk kidolgozott eljárásokkal kombinálva mind az elmélet, mind az alkalmazások terén kimagasló, úttörő jellegű eredményeket értek el 1989 előtt és után egyaránt.

A diofantikus számelmélet legfontosabb, legtöbb alkalmazással járó végtelen egyenletosztályai közé tartoznak az egységegyenletek, szétesők forma egyenletek, diszkrimináns/index forma egyenletek, elliptikus/szuperelliptikus egyenletek és különféle általánosításaik. A kutatócsoport tagjai mind 1972 és 1989 között, mind azóta számos általános effektív felső korlátot nyertek ilyen egyenletek megoldásaira [118, 120, 97, 98, 76, 77]. Az első három egyenletosztály esetén elsőként szolgáltattak általános elméleti algoritmusokat a megoldások megkeresésére [118, 76, 77]. Ezzel a kétismeretlenes polinomiális egyenletek Baker által kidolgozott effektív elméletét kiterjesztették tetszőleges ismeretlenszámú egyenletekre [118, 76, 77]. Eredményeik jelentőségét növeli, hogy nem létezik univerzális eljárás valamennyi diofantikus egyenlet megoldására.

Lagrange, Gauss, Hermite, Delone, Faddeev és Nagell legfeljebb harmadfokú esetre vonatkozó klasszikus tételeit messzemenően általánosítva, teljes általánosságban, tetszőleges fokszám esetén kidolgozták az adott diszkriminánsú egész együtthatós polinomok, binér formák és szétesők formák számos fontos alkalmazással járó effektív redukciós elméletét kvantitatív formában [118, 77]. Egyik legfontosabb alkalmazásként általános algoritmusokat adtak tetszőleges algebrai számtestben index forma egyenletek megoldására, hatvány egész bázisok meghatározására, a monogenitás eldöntésére [118]. Általánosítások és további alkalmazások végett lásd [77].

Az 1980-as évektől kezdve az általános elméleti algoritmusaikat új ötletekkel kiegészítve és az L^3 algoritmust [157] felhasználva elsők között dolgoztak ki olyan eljárásokat, amelyek nagyszámú konkrét egyenlet és bizonyos paraméteres egyenletcsaládok

esetén számítógép felhasználásával lehetővé teszik az összes megoldás meghatározását [97, 98, 120, 77, 92]. Egyben meghonosították Magyarországon a számítógépes számelméletet, amelynek Pethő Attila a vezető személyisége.

Az index forma egyenletek megoldására nyert általános algoritmusuk [118] különösen látványos további fejlődést inditott el, arra alapozva jelenleg Debrecenben [77, 92] és több külföldi kutatócsoportban foglalkoznak konkrét index forma egyenletek numerikus megoldásával.

Az általános algoritmusokat szolgáltató elméletüket J.-H. Evertse holland kollégával közösen a lehető legáltalánosabb, algebrai és transzcendens számokat is tartalmazó végesen generált alaptartományok esetére is kiterjesztették [30, 29, 78], ami várhatóan komoly hatást fog gyakorolni a diofantikus geometria további fejlődésére.

Eredményeik egy sor régi probléma megoldását tették lehetővé számukra, és az algebrai számelmélet mellett igen fontos alkalmazásokhoz vezettek egyebek között az irreducibilis polinomok elméletében, valamint általánosított számrendszerekre vonatkozóan [147, 7, 8].

További kiemelkedő eredményeik közé tartozik Schmidt-norma formaegyenletekre vonatkozó eredményeinek jelentős általánosítása, nevezetesen a szétesők formaegyenletek megoldáshalmaza szerkezetének feltárása [119], az aszimptotikusan legtöbb n-edik hatványt tartalmazó számtani sorozatok teljes leírása [123], a Fermat-féle egyenletre vonatkozó híres Wiles-tétel kiterjesztése általánosabb ternér egyenletekre [28], valamint a hatványösszegek polinomértékeire, számtani sorozatok egymásra következő tagjai szorzatában található teljes hatványokra [122], és a binom Thue-egyenletek megoldásaira vonatkozó tételeik [121, 28], és a 2-nél több ismeretlenes S-egység egyenletek megoldására kidolgozott hatékony heurisztikus algoritmusuk [34].

A nemzetközi élvonalhoz tartozó kutatócsoport széleskörű nemzetközi együttműködés keretében végzi kutatásait. Az elmúlt 30 évben nyert eredményeiket sok száz dolgozatban és a [118, 76, 77, 92, 78] könyvekben publikálták. Eredményeikért egy sor hazai és nemzetközi elismerésben részesültek.

Eredményeikről, munkásságukról részletesebb ismertetés található a kutatócsoport http://ntrg.math.unideb.hu/ honlapján, valamint a kutatók onnan elérhető honlapjain.

(Szerkesztette: Győry Kálmán, Pethő Attila és Hajdu Lajos)

Kombinatorikus számelmélet, additív kombinatorika. A kombinatorikus számelmélet igazi hugarikum, kezdeményezői Erdős Pál és Turán Pál, akik rengeteg problémát fogalmaztak és oldottak meg e téren, és számos megoldatlan problémát hagytak maguk mögött. Ezek olyan számelméleti problémák, amelyek valamilyen szempontból kombinatorikus jellegűek. Megoldásuk lényegében ügyes magyar kombinatorikus elemi meggondolásokon, illetve az analízis eszközeinek (Fourier-analízis, exponenciális összegek) alkalmazásán és ezek ötvözetén múlt.

A 90-es években komoly változások történtek e téren: algebrai módszerek, illetve geomeriai módszerek felfedezése, alkalmazása. Ezen módszerek kidolgozása jórészt magyar matematikusok nevéhez fűződik. Kiderült az is, hogy ez a hegemónia más területekre, például a statisztikus fizikára is hatással van.

Igazi áttörést jelentett, amikor a később Fields-érmet elnyert Terence Tao, aki korábban elsősorban differenciálegyenletekkel foglalkozott, ráérzett arra, hogy ezen a területen mennyi fontos és érdekes kérdés akad. Részben az ő munkásságának köszönhetően az additív kombinatorika elnevezés vált inkább elfogadottá, ami már egy sokkal tágabb területet foglal magában, hiszen itt számos különböző terület egymásra való hatásáról van szó. Ennek következménye, hogy az alapvetően nagy kombintorikai iskola, amelynek élvonalbeli képviselői Lovász László és Szemerédi Endre, még nagyobb elismerést kaptak világszerte.

Tao vetette fel a Heisenberg-féle határozatlansági reláció értelmezését diszkrét struktúrákban. Ezt a paradigmát magyar kutatóknak sikerült általánosítaniuk és bizonyítaniuk [38].

Erdős és Heilbronn 1964-ben fogalmaztak meg egy sejtést összeghalmazokkal kapcsolatban, ami a híres Cauchy–Davenport-tétel analogonja lett volna. Noha az utóbbi tétel kombinatorikus eszközökkel igazolható, a sejtésre azóta sem született hasonló jellegű válasz. Az első bizonyítás 30 évvel később született algebrai alapokon, majd nemsokára egy amerikai–izraeli–magyar szerzőhármas egy sokkal áttekinthetőbb számelméleti bizonyítást talált, ami végül elvezetett a polinom-módszer feltalálásához [11]. Ez igen széles körben alkalmazható, például gráfelmélet, véges geometriák, Kakeya-sejtés, Roth típusú problémák [52]. Ennek segítségével találtak magyar kutatók strukturális tételt az eredeti problémával kapcsolatban. Végül a módszer továbbfejlesztésével, orosz kollégákkal együttműködve megadták a tétel legegyszerűbb bizonyítását, és megoldottak egy statisztikus mechanikai problémát, amely már 20 éve izgatta a fizikusokat [136].

Az additív kombinatorika egyik centrális problémája, hogy egy additív struktúrában, például a valós számok körében, ha az A véges halmaz $A+A$ összeghalmaza kicsi, akkor milyen szerkezetű kell, hogy legyen az A halmaz [190]. Vagy ha csak kevesebbet követelünk meg, hogy statisztikusan sok A-beli pár kevés különböző összeget határozzon meg, akkor milyen szerkezetűnek kell lennie az A halmaznak [23]. Az ezekre a kérdésekre adott, döntően magyar kutatóktól származó válaszoknak messzire nyúló következményei vannak a kombinatorikában, de a csoportelméletben is.

Az előbb említett struktúratétel sugallja, hogy vagy az $A+A$ összeghalmaz, vagy az AA szorzathalmaz nagy kell, hogy legyen. Hogy mennyire nagy, az még nem eldöntött, az eredmények evolúciója magyar sikertörténet, talán meglepő, hogy leghatékonyabbnak különböző geometriai módszerek bizonyulnak, például pont-egyenes illeszkedési becslések alkalmazása [70], [201]. Még meglepőbb, hogy az összeg-szorzat becslések döntő szerepet játszanak olyan exponenciális összegek becslésében, amelyek korábban reménytelennek tűntek.

A statisztikus struktúratétel fontos eleme Gowers bizonyításának a Szemerédi-tételre, ezáltal a van der Waerden-szám korábban asztronomikus becslése jelentős javításának [104]. Továbbá, hogy ötvözve a Prímszámelmélet című részben leírt eredményekkel, Green és Tao megmutatta, hogy a prímszámok sorozatában van tetszőlegesen hosszú számtani sorozat [108]. Ez a modern számelmélet egyik leglátványosabb sikere.

(Szerkesztette: Balog Antal és Károlyi Gyula)

Pszeudovéletlen struktúrák. A számítógépek megjelenése a számelmélet fontos feladatává tette a különböző véletlenszerű, ún. „pszeudovéletlen” struktúrák konstrukcióját és tanulmányozását. Így a numerikus analízisben fontos szerepet játszanak 0 és 1 közötti valós számok pszeudovéletlen sorozatai (ezzel a kérdéskörrel Niederreiter osztrák matematikus és társszerzői foglalkoztak), míg a kriptográfiában (az ún. Vernam-féle titkosítási algoritmus kapcsán) pszeudovéletlen bitsorozatokra van szükség. Az utóbbiak modern, gyakorlati célokra is alkalmazható elméletét magyar kutatók (Gyarmati Katalin, Pethő Attila, Sárközy András) dolgozták ki francia és (kisebb részben) német kutatók közreműködésével az elmúlt 25 évben. E kutatócsoport kifejlesztette az ilyen sorozatok vizsgálatára vonatkozó technikát; e technika segítségével létrehoztak erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkező bináris sorozatok készítésére vonatkozó algoritmusokat, kidolgozták az ilyen algoritmusok biztonságos használatára vonatkozó feltételeket és olyan konstrukciókat, amelyekben e feltételek teljesülnek. Továbbá megalkották ennek az elméletnek a két dimenzióra való kiterjesztését is, amely alkalmazható bittérképek titkosítására, vízjelezésre, valamint szteganográfiában is. Továbbá megmutatták, hogy a leírt eredmények adaptálhatók több más területen is, így például a pszeudovéletlen fák és gráfok konstrukciójára, valamint véges halmazokból pszeudovéletlen részhalmazok kiválasztására. Azt is igazolták, hogy szoros kapcsolat van a pszeudovéletlen számsorozatok Niederreiter-féle elmélete, illetve a pszeudovéletlen bináris sorozatok vizsgálata között, és ez a kapcsolat mindkét területen hasznosítható.

(Szerkesztette: Sárközy András)

8. Számítástudomány

A számítástudomány a matematika legfiatalabb területei közé tartozik. A számítógépek megjelenése hívta életre az 1900-as évek közepétől. Első jelentős hazai művelője Kalmár László volt, aki nagyon sokat tett a számítógépekkel kapcsolatos oktatás és kutatás elindításáért. A számítástudománynak a magyar kutatások szemszögéből is kiemelkedő jelentőségű része foglalkozik a hatékony számítási eljárások – szokásos szakkifejezéssel algoritmusok – tervezésével és tulajdonságaik tanulmányozásával. Algoritmusokkal köztudottan már az ókori görögök is foglalkoztak. Később más tudományok igényei a matematikai számítások kidolgozásának mozgatórugóivá váltak. A számítógépek térhódításával vált világossá, hogy nem elegendő csupán az algoritmusok lépésszámának végességére törekedni, hanem szükség van a hatékonyság finomabb mérésére. Ez vezetett többek között a hatékony számítási eljárásnak megfelelő polinomiális algoritmus fogalmához. A számítástudomány területén igen hamar, már a nyolcvanas években születtek kiemelkedő eredményeink. Ezek közé tartozik az Arjen Lenstra, Hendrik Lenstra és Lovász László által kidolgozott rácsredukció módszere, valamint annak alkalmazásaként az első hatékony algoritmus racionális együtthatós polinomok felbontására [157]. Nagy visszhangot kiváltó korai eredményeknek tekinthetők Ajtai Miklós, Komlós János és Szemerédi Endre optimális párhuzamos algoritmusa az adatrendezés feladatára [6], valamint a Michael R. Fredman, Komlós János és Szemerédi Endre által által kidolgozott gyors és helytakarékos adattárolási és elérési módszer [86]. Babai László dolgozata [14]

az interaktív bizonyítások nagy jelentőségű elméletének egyik alapítója, elindítója lett.

A következőkben körvonalazunk néhány nagy hatású magyar eredményt az 1989–2019 közötti időszakból:

Kombinatorikus algoritmusok. A számítási eljárásokkal szemben fontos és természetes igény, hogy a kapott objektum helyességének közvetlen ellenőrzésére egyszerű igazolvány, ún. jó karakterizáció álljon rendelkezésre. Jó karakterizációra Kőnig és Egerváry klasszikus tételei [148, 67] jelentették az egyik első példát. Kuhn [151] ezekre alapozott polinomiális algoritmusa Magyar módszer néven terjedt el a világban. Kiderült azonban, hogy korlátozott az olyan problémák köre, ahol polinomiális algoritmus és jó karakterizáció létezik, és a számítási problémák egy jelentős részénél erre nincs is remény: ilyenek az ún. *NP-nehéz* feladatok. Emiatt nagy jelentőségű, ha egy új problémaosztályról sikerül kimutatni, hogy létezik hozzá jó karakterizáció. 1990-ig ez utóbbi problémák döntő többsége olyan volt, hogy az általánosabb, költséges vagy súlyozott változatokat is lefedték. Frank András [81, 82, 83], munkatársaival, 1990-től kezdve egy új kaput nyitott meg jól karakterizálható problémák egy olyan széles osztályát feltárva, ahol a költséges változat már NP-nehéz. Éppen ez a tulajdonság jelzi, hogy az itt megoldott problémák valóban függetlenek a korábban megoldottaktól. Ennek révén vált például lehetővé a hálózatok általános összefüggőség-növelési problémáinak hatékony megoldása. Az eredmények az eltelt három évtizedben mai napig tartó vizsgálatokat indítottak el (lásd pl. [31, 32, 33]).

A *pakolási problémák* a kombinatorikus optimalizálás széles körben alkalmazott, sokat vizsgált feladatai. Az alapfeladatban (ládapakolás) tárgyakat kell elhelyezni a lehető legkevesebb azonos kapacitású ládába. A probléma, amelyet először D. Johnson vizsgált részletesebben, NP-nehéz; a közelítő megoldások keresése a témakör legizgalmasabb feladatai közé tartozik. Az itt feltett kérdések több más területen inspiráltak kutatásokat. Csirik János a ládapakolási probléma több változatával foglalkozott eredményesen. Kiemelhető a [53] dolgozatban elért eredmény, amely szerint egy, a legkisebb négyzetek módszerén alapuló eljáráscsalád átlagos viselkedésben az addigi legjobb módszereket szolgáltatja. A problémakört azóta is intenzíven kutatják Magyarországon is.

Véletlennel ellenőrizhető bizonyítások. A témakör a korábban említett interaktív bizonyítások irányából indult, és az algoritmikus feladatok osztályozásával foglalkozó számítási bonyolultság elméletének egyik legfontosabb ágává vált. A terület kiemelkedő eredménye szerint az NP-beli feladatokhoz létezik hatékony, holografikus bizonyítás, amelyet elegendő kis (konstans) számú helyen megvizsgálni a helyességének ellenőrzéséhez. Az ellenőrző algoritmus véletlent használhat, de erősen korlátozott mértékben. A több egymásra épülő dolgozat részben magyar kutatók, Babai László, Lovász László, Szegedy Márió munkája is [17, 79], közülük az utóbbi tanulmány Gödel-díjban részesült. A véletlennel ellenőrizhető bizonyítások erős eszközöket nyújtanak az optimumkereső feladatok közelítő változatainak elemzéséhez: segítségükkel több ilyen közelítő változat nehézségét sikerült kimutatni.

Gráfizomorfizmusok. Gráfnak nevezünk egy olyan X struktúrát, ahol adott a pontok egy V halmaza, valamint élek (azaz pontpárok) egy E halmaza. A gyakorlatban előforduló gráfok közül az egyik legismertebb a Facebook-gráf (itt az élek a Facebook-ismerősök kö-

zött futnak). A gráfizomorfizmus probléma (röviden IZO) a következő számitási feladat: döntsük el, hogy két adott véges gráf ugyanaz-e, azaz döntsük el, hogy van-e olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés a csúcshalmazok között, amely mindkét irányban megőrzi az éleket. Általánosabban azt is vizsgálhatjuk, hogy két adott kombinatorikus struktúra valójában ugyanaz-e. Számos ilyen jellegű probléma visszavezethető az IZO problémára. Babai László a korábbiaknál nagyságrendekkel hatékonyabb, ún. kvázipolinomiális módszert talált az IZO feladat megoldására [15]. Az eredmény az IZO feladatot a nagyon nagy (exponenciálishoz közeli) munkaigényű feladatok közül a hatékonyan (polinom időben) megoldhatókhoz közel helyezi, ezzel igen komoly és sok szakértő számára meglepő előrelépést érve el. Az eredményt a világ matematikus társadalma nagy érdeklődéssel fogadta, és a 2010-es évtized legnagyobb számítástudományi áttöréseként ünnepelte.

Algoritmikus Lovász-féle lokális lemma. A Lovász-féle lokális lemma (1975) [74] nagyon széles körben használható módszer arra, hogy bizonyos kritériumoknak megfelelő kombinatorikai struktúrák létezését bizonyítsuk. Az első alkalmazása az volt, hogy ha egy k-uniform hipergráfban minden hiperél legfeljebb $2^{k-1}/e - 1$ másikat metsz, akkor a csúcsok kétszínezhetők anélkül, hogy monokromatikus hiperél keletkezne. A lemma eredeti bizonyítása azonban nem konstruktív, azaz nem olvasható ki belőle hatékony algoritmus egy ilyen színezés megtalálására.

A lemma első algoritmikus változatát Beck József adta 1991-ben, [26], de ebben a numerikus feltétel sokkal erősebb megszorítást tartalmazott (az előző színezési feladatban ez a feltétel a metsző hiperélek számára vonatkozik). Robin Moser és Tardos Gábor 2010-es cikke, [173] (illetve bizonyos speciális esetekben Moser egy megelőző cikke) adta az első olyan algoritmikus változatot, amely már a lemma eredeti feltételei mellett is működik. Az általuk megadott véletlen algoritmus nagyon egyszerű, a fenti színezési feladat esetében abból áll, hogy először uniform véletlen kétszínezéssel próbálkozunk, majd amíg van monokromatikus hiperél, addig választunk egy tetszőleges ilyet, és a benne szereplő csúcsokat véletlenül és uniform módon újraszínezzük. Ha a Lovász-féle lokális lemma feltétele teljesül a hipergráfra, akkor ez az eljárás várhatóan a hipergráf méretében lineáris számú iteráció után véget ér egy megfelelő kétszínezés megtalálásával.

Ujjlenyomat-kódok. Digitális dokumentumok másolásvédelmének egyik lehetséges eszköze, hogy a dokumentum minden példányába egy-egy (különböző) azonosító kódot (ujjlenyomatot) rejtünk el. Így, ha illetéktelen helyre kerül a dokumentum, mindjárt az is kiderül, ki juttatta el oda. Ez a módszer csak akkor működhet, ha a felhasználó nem találja meg a dokumentumba rejtett kódot, mert ellenkező esetben egyszerűen kitörölheti azt. Nem tudjuk azonban megakadályozni, hogy felhasználók egy csoportja ugyanannak a dokumentumnak több különböző ujjlenyomattal megjelölt példányát összehasonlítsa, és ekkor megtalálják az eltéréseket és ezzel az elrejtett ujjlenyomat nagy részét. Nehéz olyan ujjlenyomat-kódot tervezni, amelynél a fel nem tárt kevés pozició (ahol az összehasonlított dokumentumokba rejtett ujjlenyomatok megfelelő bitjei véletlenül megegyeznek, így rejtettek maradnak) nagy valószínűséggel elég legalább az egyik résztvevő megtalálására. Ilyen (ún. összejátszás ellen védett) ujjlenyomat-kódokat először Dan Boneh és James Shaw talált 1998-ban, de ők a szükségesnél sokkal hosszabb kódot konstruáltak. Tardos Gábor nagyon egyszerű és sokkal rövidebb, összejátszás ellen védett ujjlenyomat kódokat talált 2003-ban [210, 211], és egyben bebizonyította, hogy

az általa konstruált kódok hossza konstans szorzótól eltekintve optimális.

Monte-Carlo fa-keresés. Itt egy számítási eljárásról, döntési folyamatokban, leggyakrabban játékokban, használt heurisztikus algoritmusról van szó. A legjelentősebb változatát, az UCT algoritmust, Kocsis Levente és Szepesvári Csaba fejlesztette ki 2006-ban, azonnali áttörést hozva ezzel a Go játékot játszó programok világában [139, 100]. Az algoritmus véletlenszerű útvonalakkal építi a fát. A csomópontokban egy ún. többkarú rabló algoritmust használva, elsősorban a sikeresebbnek tűnő lépések felé irányítja a keresést, de a minden esetet megvizsgáló bejárás ötletét is alkalmazza. A közelmúltban az UCT algoritmus változataira épült játékprogramok túlszárnyalták a legjobb Go-játékosokat, és több más játékban is a legerősebbnek számítanak. A módszert általánosabb döntési feladatok megoldására is alkalmazták több területen, ahol szimulált modell segítségével lehet tervezni. Az eljárás gyakorlati sikere mellett a szerzők bizonyították, hogy az UCT algoritmus elméleti szempontból is megalapozott: aszimptotikusan konvergál az optimális stratégiához. A hatását bizonyítja a több mint 2500 hivatkozás is.

Programok elemzése. A számítógépek kapacitásának rohamos növekedésével együtt a szoftverrendszerek mérete is jelentősen megnövekedett. Komoly kihívást jelent az ilyen nagy méretű, sokszor több évtizede működő rendszerek minőségének vizsgálata, karbantarthatóságuk növelése.

A forráskód elemzésével a programelemekhez (pl. eljárások) számértékeket, szoftvermetrikákat rendelhetünk. Ilyen például az adott programelem mérete vagy a csatolási metrika, amely megmutatja, hogy a programelem mennyire szorosan kapcsolódik a többihez. Gyimóthy Tibor kollégáival 2005-ben publikált egy cikket az IEEE Transactions on Software Engineering folyóiratban [115], amelyben megmutatták, hogy a szoftvermetrikák és a szoftverek minősége között szoros kapcsolat van. Ipari méretű szoftveren (Mozilla) igazolták, hogy a magas csatolási metrika értékű programelemek a leginkább sérülékenyek. Ez volt az első közlemény, amely valós, nagy méretű szoftver esetében igazolta a szoftvermetrikák és a szoftverminőség kapcsolatát. Ennek köszönhetően az eredmény nagy nemzetközi érdeklődést váltott ki (több mint 900 hivatkozás van a dolgozatra).

Automaták és formális nyelvek. Az elmélet Stephen C. Kleene és Noam Chomsky munkásságának hatására alakult ki az 1960-as években. Azóta kiszélesedett és számos területen alkalmazást nyert: programozási nyelvek, fordítóprogramok, hardver- és szoftverrendszerek tervezése és verifikációja, kommunikációs protokollok, természetes nyelvek feldolgozása, biológia motiválta számítások stb. Ésik Zoltánnak az iterációs elméletek területén elért, különösen a fixpont-műveletek azonosságaira vonatkozó eredményei [75] jelentősen hozzájárultak a terület fejlődéséhez. Fülöp Zoltán a faautomaták elméletének kiterjesztésével és a fatranszformátorok kompozícióira vonatkozó eredményeivel [73] gazdagította az elméletet. Csuhaj Varjú Erzsébet egyik elindítója és kiépítője volt a grammatikarendszerek elméletének, amely a formális nyelvek eszköztárát alkalmassá tette multi-ágens rendszerek szintaktikai modellezésére [62], valamint természet-motivált, a Turing-géppel egyenértékű számítási modellek kidolgozásával és vizsgálatával hozzájárult az új elvű számítások elméletének fejlődéséhez is.

Elosztott számítások. Az elosztott számítógép-rendszerek az Internet gyors térnyeré-

sének köszönhetően alakultak ki. Jellegzetes példák azok az internetes szolgáltatások, amelyeket a meredeken növekvő igények miatt már csak igen sok számítógépet tartalmazó komplex, többrétegű rendszerekkel lehet megvalósítani, amilyen az internetes keresés (Google) vagy a nagy online áruházak (Amazon). Itt a fejlesztőknek figyelembe kell venniük – egyebek mellett – a hálózat folyamatos és dinamikus változását, a kommunikáció sérülékenységét, a központok hiányát. Ilyen rendszereken elosztott működésű algoritmusokat dolgozott ki munkatársaival Jelasity Márk. A [132] dolgozat az adat aggregációk (pl. átlagok, minimumok, maximumok) elosztott számítására ad hatékony és robusztus megoldásokat.

Algebrai, aritmetikai számítások. A széles körben használatos szimbolikus számítási programcsomagok (Mathematica, Sage, Magma, GAP stb.) fontos jellemzője, hogy lehetőségeket adjanak összetett matematikai struktúrákkal való számítások végzésére. Jelentős szerepet játszanak az oktatás, a kutatás és az innováció területein. Működésükhöz szükség van az adott struktúrákkal dolgozó hatékony számítási eljárások, algoritmusok kidogozására, elemzésére. Különösen fontosak az adott struktúra egyszerűbb összetevőinek, építőköveinek meghatározására irányuló módszerek. Babai László, Seress Ákos és munkatársaik a csoportokkal kapcsolatos számítások terén értek el kimagasló eredményeket [16, 196]. Benczúr András, Ivanyos Gábor, Rónyai Lajos, Sarlós Tamás és munkatársaik algebrákkal, modulusokkal és mátrixokkal kapcsolatos algoritmusokat dolgoztak ki [152, 130, 189, 195]. Pethő Attila, Járai Antal és munkatársaik algoritmikus számelméleti problémák megoldása terén voltak eredményesek [178, 129].

Algoritmusaik, megoldásaik egy része mára bekerült a fontosabb matematikai programcsomagokba, ezzel is gazdagítva a praktikus számítások eszköztárát. Egyes módszereiket sikeresen alkalmazták a matematikai számításoktól távolabbi területeken (pl. internet, rádiókommunikáció, kvantumszámítások, bonyolultságelmélet) is.

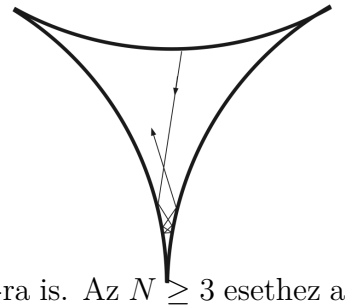
(Szerkesztette: Rónyai Lajos)

9. Sztochasztika, statisztikus fizika, dinamikai rendszerek, információelmélet

A magyar sztochasztika alapjait Erdős Pál és Rényi Alfréd világszínvonalú munkássága vetette meg, olyan nagyszerű gyümölcsökkel, mint Komlós–Major–Tusnády (1975–1976) optimális Brown-mozgás approximációja, amely a világban „magyar beágyazásként" ismert. Az elmúlt 30 év fejleményeit 15 eredménycsoporton keresztül mutatjuk be, a teljesség igénye nélkül, majdnem véletlenszerű sorrendben.

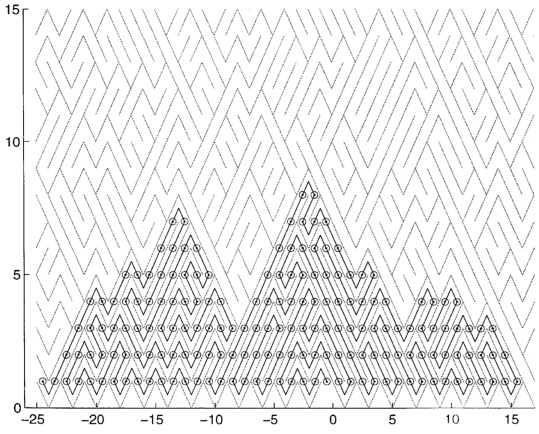
(1) Bármily meglepő is, az atomelmélet véglegesen elfogadott csak az Avogadro-szám Einstein általi levezetése (1905), ill. annak kísérleti igazolása (Perrin, 1909) után lett. (Utóbbiért kapott Perrin 1926-ban Nobel-díjat.) De Einstein zseniális levezetésének feltételei nem teljesülnek, így a Brown-mozgásnak a newtoni mechanika alapján való megalapozása azóta is a matematika kulcsfeladata. Kiindulva 1986-os – Sinaiékkal párhuzamosan elért – szórásbecsléseikből, Szász Domokos és Tóth Bálint 1987-ben

általános elméletet adtak erre a Rayleigh-gáz esetén – amelyet bizonyos esetekben csatolási módszerrel igazoltak is. Utóbbit Tóth ismét tárgyalta 2007-ben Bálint Péterrel és Tóth Péterrel közösen [20]. Tíz évvel később az általános kérdéshez is visszatért a Lorentz-gázra vonatkozó eredményeiben: a periodikus modellre Markloffal [163], a véletlen modellre Lutskóval [160].

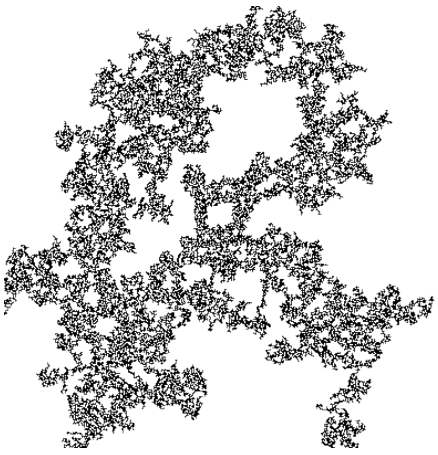


(2) A statisztikus fizika megalapozásánál alapvető Boltzmann–Sinai-féle ergodikus hipotézisre Sinai 1970-ben adott – forradalmian új – módszert 1970-ben $N = 2$ korong esetére $D = 2$ dimenzióban. (Az általa bevezetett *szóró matematikai biliárd* egy olyan pontrészecske mozgását írja le, amely szigorúan konvex szórótestek között pattog, szabadon repülve illetve a szórótestekről rugalmasan visszapattanva; ld. ábra, azon $D = 2$.) A szóró biliárdok elméletét továbbfejlesztve ezt Chernovval 1987-ben kiterjesztették $N = 2$, $D \geq 2$-ra is. Az $N \geq 3$ esethez a *félig-szóró biliárdok* elméletét kellett megalapozni. Ezt előbb Krámli–Simányi–Szász tette meg 1989-ben, majd a további lépések: [149], [150], [198] végül Simányi révén (2003, már USA) a hipotézis teljes igazolását eredményezte [199]. A „moszkvai" iskola mellett a budapesti vezető a világban. 2014-ben Oslóban a Science Lecture-t

(3) Sinai 70-es évekbeli munkássága óta a szóró biliárd (ld. (2)) a kaotikus (vagyis determinisztikus, mégis kiszámíthatatlan) viselkedés egyik iskolapéldája. A kiszámíthatatlanságot számszerűen jellemző egyik legerősebb tulajdonságot, az exponenciális korrelációlecsengést Young és Chernov bizonyította 1989-ben és 1990-ben a kétdimenziós esetre. A bizonyítást Bálint Péternek és Tóth Péternek sikerült kiterjeszteni *magas dimenziós* modellekre, abban az esetben, amikor a szabad úthossz korlátos, és sarokpontok nincsenek. A náluk megjelenő *komplexitási feltétel* azóta sok más modellben is felbukkant, és szerepe kevéssé megértett. Dolgozatuk az Ann. Henri Poincaré folyóirat 2008-as legjobb cikke díját nyerte el [21].



(4) Sok természetes bolyongás-modell van, ahol a bolyongó részecske kölcsönhatásban van a múltjával (a Brown-mozgás pollenje is ilyen), de ritkábbak az olyanok, ahol ez a skálalimeszre nemtriviális módon öröklődik, azaz nem ballisztikus és nem Brown-mozgás a határfolyamat. Az első ilyen egydimenziós folyamatot Tóth Bálint és Werner konstruálták 1998-ban [216], amely – megdöbbentő módon – összeolvadó Brown-mozgások téridő labirintusának fölfedezésével is leírható (ld. ábra). Ez skálalimesze annak a természetes *öntaszító mechanizmusnak*, hogy lokálisan abba az irányba igyekszik a részecske, ahol eddig a legkevesebb időt töltötte, és amelyre Tóth (1995) igazolta, hogy t idő alatt $t^{2/3}$ távolságra jut [214]. Ugyanezen mechanizmus 2 dimenzióban már csak logaritimikusan szuperdiffuzív (Tóth–Valkó [215]), magasabb dimenziókban pedig már diffuzív viselkedést okoz (Horváth–Tóth–Vető [128]).



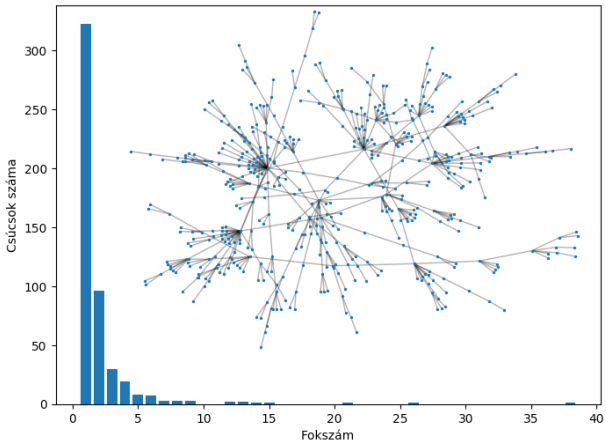
(5) A statisztikus fizika legegyszerűbben megfogalmazható fázisátmenete a perkoláció síkrácsokon: a háromszögrács minden csúcsát függetlenül p valószínűséggel feketére festve, $p \leq 1/2$-re csak véges fekete fürtöket kapunk, $p > 1/2$-re már egy végtelen fürtöt is. A $p = 1/2$ kritikus esetnek konform-invariáns fraktál skálalimesze van, amelyet Schramm (2000) és Smirnov (2001) úttörő munkái óta kezdünk érteni. Hogyan néz ki a *közelkritikus rendszer*, hogyan áll össze a végtelen fürt, amint $p > 1/2$ lesz? Mi történik *dinamikus perkolációban*, ahol minden csúcs oda-vissza kapcsolgat fekete és fehér között, mennyire gyorsan változik a makroszkopikus fürtstruktúra, van-e a dinamikának skálalimesze? E kérdéseket Garban, Pete Gábor és Schramm két nagylélegzetű projektben (2010 és 2013-18) válaszolta meg [94], [95], [96].

(6) Az egyik legismertebb (és megértett) *önhasonló fraktál* a Sierpiński-háromszög, amely önmagának három darab felére kicsinyített példányának majdnem diszjunkt uniójából áll. Ha azonban egy önhasonló halmaz úgy áll elő, hogy a lekicsinyített darabok között jelentős átfedés van, akkor az nagyon bonyolult szerkezetű lesz. Az ilyen fraktálok megértésében jelentett előrelépést a Pollicott és Simon Károly által 1994-ben bevezetett transzverzalitási módszer [183], amelynek (később kiterjesztett változatainak) segítségével önhasonló, önkonformis és önaffin fraktál-családok tipikus tagjainak szerkezetét érthetjük meg. Sok régi problámát oldottak meg ezen módszer segítségével (mint például Erdős Pálnak egy, a Bernoulli konvolúciókkal kapcsolatos 60 éve nyitott problémáját Solomyak 1995-ben). Az önhasonló esetben ezt a módszert Hochman 2014-ben bevezetett inverz entrópia módszere túlhaladta, de az általánosabb önkonformis esetben még ma is ez a legerősebb módszer.

(7) A Tóth Bálint és Ráth Balázs által 2009-ben definiált erdőtűz-modell [188] az *önszerveződő kritikus viselkedés* jelenségének modellje, egy időben fejlődő véletlen hálózat. Tekintsünk n csúcsot, és bármelyik kettő közt $1/n$ rátával jelenik meg egy gyúlékony él. Ezzel párhuzamosan minden csúcsba a többitől függetlenül $\lambda(n)$ rátával villám csap, és a villám sújtotta csúcs összefüggő komponensének élei azonnal leégnek. A teremtés és pusztítás erői együttesen kritikus állapotban tartják a hálózatot: a tűzveszélyes (szuperkritikus) és biztonságos (szubkritikus) állapotok határán. A komponensek struktúrájának leírását Crane–Ráth–Yeo végezte el [51].

(8) Mandelbrot már a 60-as években javasolta, hogy a részvények árfolyamatait fraktál tulajdonságú folyamatokkal, ún. frakcionális Brown-mozgással írják le. Később kiderült, hogy ezek a modellek opcióárazásra alkalmatlanok, amennyiben idealizált kereskedési mechanizmust tételezünk fel. Ha azonban figyelembe vesszük *a piac súrlódásait* (tranzakciós költségek, likviditási megszorítások, adók), akkor az opcióárazás is lehetségessé válik, ahogyan Guasoni–Rásonyi–Schachermayer (2008) megmutatta [106]. Guasoni–Nika–Rásonyi (2018) pedig explicit aszimptotikusan optimális stratégiát talált olyan befektetők számára, akik portfóliójuk várható értékét maximalizálják likviditási megszorítások jelenlétében [107]. A pontos növekedési rátát is meghatározták a frakci-

onális Brown-mozgás önhasonlósági paraméterének függvényében.



(9) Barabási és Albert (1999) egy nagyhatású cikkben vezették be *skálafüggetlen hálózatok* generálására azt a modellt, hogy egyenként érkező csúcsok mindegyike m éllel kapcsolódik a már meglévő csúcsokhoz, az élek végpontjait véletlenül, a meglévő fokszámok szerint súlyozva választva [9]. Egy durva heurisztikus érvelést adtak, hogy a k fokú csúcsok aránya $\sim c_m k^{-3}$, ami nagyon különbözik pl. az Erdős–Rényi-gráfoktól, de annál inkább hasonlít sok valós hálózat fokszámeloszlásához. A sejtést Bollobás, Riordan, Spencer és Tusnády (2001) bizonyították [10].

(10) Sok egymásra ható véletlenül mozgó részecske sűrűségprofiljának változását gyakran determinisztikus differenciálegyenletekkel lehet leírni. Fritz József két, Dobrushinnal közös, 1977-es dolgozatában kidolgozta a klasszikus nem-egyensúlyi dinamika alapvető egzisztenciatételeit; ezek azóta is az elmélet abszolút alapcikkei. Az ott bevezetett *kompenzált kompaktság* elméletének alkalmazásával később számos, főleg Ginzburg-Landau típusú modell hidrodinamikai határátmenetét tisztázta. Különösen nagy hatású ezek közül Fritz Funakival és Lebowitzcal közös 1994-es dolgozata, amelyben Hamilton-rendszerek stacionárius állapotait jellemezte véletlen zaj esetében [87].

(11) A valószínűségszámítás hajnalán a várható érték fogalma az igazságos osztozkodáshoz kapcsolódott, így Nicolas Bernoullitól (1713) kezdve sok homlokráncolást okozott a *szentpétervári paradoxon*: Péter addig dobál egy pénzérmét, amíg fej nem lesz, és ha ez a k-adik dobásra sikerül, akkor Pálnak 2^k dukátot fizet; mennyit érjen Pálnak a játék joga? Nyereményének várható értéke $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}2^k = \infty$, de pici valószínűséggel nyer csak nagy összeget, így őrültség lenne sok dukátot fizetni a játék jogáért! A paradoxon feloldásához az vezet, hogy egy játék értékének meghatározásához tudnunk kell, hányszor fogunk játszani. Feller (1945) bizonyította, hogy n játéknál Pál össznyereménye $n \log_2 n$ dukát körül lesz nagy valószínűséggel. De ez csak egy gyenge törvény, és sok játék esetén az össznyeremény ennél elég sokszor lesz lényegesen több. Így a pontos válasz sok megfontolástól függ, amelyeknek Csörgő Sándor 1991 és 2001 között több cikkben járt utána [61].

(12) Wigner Jenő szerint a természetben előforduló rezonanciák sokszor megérthetők statisztikai úton, *véletlen mátrixok* segítségével. Nagy véges véletlen mátrixok sajátértékeinek halmaza konvergálhat egy pontfolyamathoz, illetve a mátrixok maguk konvergálhatnak egy véletlen operátorhoz. Például a Montgomery–Dyson-sejtés szerint a Riemann-féle dzéta-függvény gyökei a kritikus egyenesen úgy néznek ki, mint GUE véletlen mátrixok sajátértékeinek limesze. Sőt, ha az összes gyököt egy önadjungált operátor sajátértékeiként sikerülne realizálni, az bizonyítaná a Riemann-sejtést. Valkó Benedek és Virág Bálint 2009-ben a hiperbolikus síkon való Brown-mozgás segítségével

megkonstruálták a Sine_β pontfolyamatot, amely véletlen mátrixok spektrumának a limesze [217], majd 2017-ben konstruáltak ehhez egy önadjungált differenciáloperátort is [218]. Ezzel a Wigner–Dyson-program fontos alapköveit tették le.

(13) Van n független mintánk egy eloszlásból, és egy k-változós függvényünk. Lehet venni a függvényértékek átlagát a minta összes k-elemű részhalmazán (U-statisztika); vagy átlagoljuk a teljes eredeti mintát, vegyünk ebből az átlagból k független példányt, és ezeken értékeljük ki a függvényünket. Mennyire térhetnek el ezek a statisztikák az elméleti átlaguktól? Van-e határeloszlás, amint n tart a végtelenbe? Ezek a statisztikus fizikában és a nemparaméteres maximum likelihood becslések vizsgálatában is előkerülő kérdések, amelyek megértéséhez Major Péter fejlesztett ki módszereket, az eredményeket egy Springer Lecture Note-ban (2013) foglalva össze [161].

(14) Egy metrikus téren értelmezett valószínűségi mértékre a *mértékkoncentráció* tulajdonság informálisan azt jelenti, hogy minden legalább 1/2 valószínűségű halmazhoz hozzávéve a hozzá közeli pontokat olyan halmaz adódik, melynek valószínűsége már majdnem 1. Szorzatmértékekre (amikor független, egyforma eloszlású valószínűségváltozókat nézünk) ezek klasszikus eredmények, olyan kézzelfogható következményekkel, mint a várható érték körüli nagyeltérés-tételek, vagy pl. az, hogy a magas dimenziós gömbfelületek felszíni mértékének java az egyenlítő (bármelyik egyenlítő!) kis környezetében található. Marton Katalin a 90-es évek közepén észlelte, hogy egy általa adott információelméleti egyenlőtlenség mértékek Ornstein-féle $\overline{d}$ távolsága és információs divergenciája között [164] fölhasználható mértékkoncentráció bizonyítására szorzatterekben, nem független változókra is: Markov-láncokra és Gibbs-mezőkre [165, 166]. Ez a megközelítés olyan kutatókra volt jelentős hatással, mint Talagrand és Villani, és jelentőségét 2013-ban Shannon-díjjal is elismerték. 2019-ben megjelent utolsó cikkében [167] áttetsző bizonyítást adott arra, hogy magas hőmérsékletű Gibbs-mértékek Glauber-dinamikája kielégíti a logaritmikus Sobolev-egyenlőtlenséget (ami a Markov-láncok gyors keverésének egy erős formája).

(15) Az *információelmélet* központi témája a megbízható információtovábbítás lehetőségeinek matematikai vizsgálata. Ezen belül a titkosság biztosítása az utóbbi 30 évben vált intenzív kutatás tárgyává, főképp U. Maurer (ETH, Zürich) kezdeményezésére.

Régóta ismert, hogy egy k véletlen bitből álló kulcs, amelyről a potenciális lehallgatónak nincs információja, alkalmas bármely, maximum k bitből álló üzenet titkosítására, vagyis olyan kódolására, amely biztosítja az átvitel teljes titkosságát. Ezért alapvető kérdés, hogy két vagy több felhasználó mekkora, mindegyikük által ismert titkos kulcsot tud generálni, a vizsgált modell feltételei mellett. Gács Péter és Körner János egy eredményéből [93] következik, hogy titkos kulcs generálásához, triviális esetek kivételével, szükség van a felhasználók közötti kommunikációra. Ennek azonban nem kell titkosnak lennie, sőt a szokásos feltevés az, hogy teljes egészében hozzáférhető a lehallgató számára. Ha $K(n)$ jelöli az n időegység alatt generálható kulcs hosszát (informálisan), *titkos kulcs kapacitás*on a $K(n)/n$ hányados határértékét értjük, ha $n \to \infty$.

Két felhasználós modellek titkos kulcs kapacitására vonatkozólag fontos eredményeket ért el Csiszár Imre és R. Ahlswede (Uni. Bielefeld), ld. [4, 5]. Módszerükkel azt is

sikerült bebizonyítani, hogy a titkos hírközlés lehetőségére vonatkozó korábbi fő eredmények érvényben maradnak az ún. erős (Maurer-féle) titkossági kritérium mellett is [54]. A több felhasználós modellek titkos kulcs kapacitására vonatkozó alapvető tételek Csiszár és P. Narayan (University of Maryland) eredményei. Először olyan m felhasználós modelleket vizsgáltak, amelyek egy $X = (X^1, \dots, X^m)$ véletlen vektor független ismétléseinek megfigyelésén alapulnak (ún. forrás típusú modellek). Az i-edik felhasználó az n időegység alatti ismétlések i-edik komponenseiből álló $X_1^i, \dots, X_n^i$ véletlen sorozatot figyeli meg. Ilyen modellekre meghatározták a titkos kulcs kapacitást, az X eloszlásának függvényében, ha a felhasználók között korlátlan kommunikáció van megengedve [55]. Hasonló eredményeket értek el ún. csatorna típusú modellekre is, ahol az X független ismétlései helyébe egy több felhasználós csatorna bemeneti és kimeneti változói lépnek. Teljes megoldást egy bemenetű csatornák esetére találtak [56], több bemenetű csatornák esetére részeredményeket értek el [57].

Véletlen folyamatok matematikai modellezésére gyakran különböző számú paramétertől függő modellek jönnek számításba. Pl. a számításba jövő modellek lehetnek az $\{1, \dots, a\}$ állapotterű k-adrendű Markov- láncok, ahol k tetszőleges természetes szám, ekkor konkrét k-ra a modell $a^k(a-1)$ paramétertől függ. A matematikai statisztikában több modellválasztási kritérium ismeretes, amelyek előnyben részesítik a kevesebb paramétert. Az egyik legismertebb az információelméleti motiváltságú BIC kritérium.

Markov-láncokra először Csiszár és P. Shields (Toledo University) bizonyította be, hogy a rend BIC kritérium szerinti becslése erősen konzisztens, vagyis ha (pontosan) k-adrendű Markov-láncból vett mintából becsülünk rendet, elég nagy minta esetén a becslés eredménye 1 valószínűséggel k lesz [58]. Korábban ez csak egy k-ra eleve adott felső korlát mellett volt ismert. Ezután Csiszár és Talata Zsolt [59] igazolta, hogy az ún. kontextus-fa is erősen konzisztens módon becsülhető a BIC kritérium alapján, a mintaelemszámtól lineárisan függő számítási bonyolultsággal. Ehhez a markovitás feltevése sem szükséges (nem Markov esetben a kontextus-fa végtelen, míg k-adrendű Markov-lánc esetén a magassága k). Továbbá a rendbecslés konzisztenciájára vonatkozó eredményt kiterjesztették Markov véletlen mezőkre [60].

Morvai Gusztáv és B. Weiss (Hebrew University, Jerusalem) több dolgozatban foglalkozott a Markov-rend becslésével és az ún. memória zavak statisztikai próbákkal való meghatározásával, ez utóbbi a kontextus-fa meghatározásával analog kérdés. Az általuk bevezetett becslések, ld. pl. [168, 169], bonyolultabbak a BIC kritériumon alapulóknál, de nemcsak véges hanem megszámlálhatóan végtelen állapottér esetén is alkalmazhatók, és ilyenkor is erősen konzisztensek.

(Szerkesztette: Csiszár Imre, Pete Gábor, Szász Domokos)

10. Elnyert European Research Council-pályázatok

Lovász László, 2008, Eötvös Loránd Tudományegyetem, From discrete to continuous: understanding discrete structures through continuous approximation

Pintz János, 2008, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Gaps between primes and almost primes. Patterns in primes and almost primes. Approximations to the twin prime and Goldbach conjectures

Bárány Imre, 2010, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Discrete and convex geometry: Challenges, methods, applications

Totik Vilmos, 2010, Szegedi Tudományegyetem, Potential theoretic methods in approximation and orthogonal polynomials

Röst Gergely, 2010, Szegedi Tudományegyetem, Delay differential models and transmission dynamics of infectious diseases

Stipsicz András István, 2011, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Low dimensional topology in Budapest

Marx Dániel, 2011, MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézete, Parameterized complexity and the search for tight complexity results

Szemerédi Endre, 2012, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Regularity and irregularity in combinatorics and number theory

Szegedy Balázs, 2013, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Limits of discrete structures

Abért Miklós, 2014, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Asymptotic invariants of discrete groups, sparse graphs and locally symmetric spaces

Marx Dániel, 2016, MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézete, Systematic mapping of the complexity landscape of hard algorithmic graph problems

Pyber László, 2016, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Growth in groups and graph isomorphism now

Pete Gábor, 2017, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Noise-sensitivity everywhere

Lovász László (társtémavezetők: Barabási Albert-László, Jaroslav Nešetřil), 2018, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, (Közép-Európai Egyetem, Charles University of Prague), Dynamics and structure of networks

Pach János, 2019, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, From Geometry to Combinatorics and Back: Escaping the Curse of Dimensionality

11. Nemzetközi, vagy magas rangú külföldi szakmai kitüntetések, díjak

Tardos Gábor: Európai Matematikai Társulat díja, 1992

Babai László: Gödel-díj, 1993

Laczkovich Miklós: Ostrowski-díj, 1993

Lovász László: Brouwer-érem, 1993

Csiszár Imre: Shannon-díj, 1996

Lovász László: Bolzano-érem, 1998

Lovász László: Wolf-díj, 1999

Lovász László: Knuth-díj, 1999

Totik Vilmos: Lester R. Ford-díj, 2000

Lovász László: Gödel-díj, 2001

Szegedy Márió: Gödel-díj, 2001

Prékopa András: EURO Aranyérem, 2003

Lovász László: John von Neumann-érem, 2005

Szegedy Márió: Gödel-díj, 2005

Csiszár Imre: Bolzano-érem, 2006

Lovász László: John von Neumann elméleti díj, 2006

Tardos Éva: Dantzig-díj, 2006

Szemerédi Endre: Rolf Shock-díj, 2008

Szemerédi Endre: Leroy P. Steele-díj, 2008

Virág Bálint: Rollo Davidson Prize, 2008

Szegedy Balázs: European Prize in Combinatorics, 2009

Lovász László: Kiotó-díj, 2010

Pete Gábor: Rollo Davidson Prize, 2011

Lovász László: Fulkerson-díj, 2012

Szegedy Balázs: Fulkerson-díj, 2012

Tardos Éva: Gödel-díj, 2012

Szemerédi Endre: Abel-díj, 2012

Marton Katalin: Shannon-díj, 2013

Körner János: Shannon-díj 2014

Pintz János: Cole-díj, 2014

Babai László: Knuth-díj, 2015

Csiszár Imre: Richard W. Hamming-érem, 2015

Babai László: Dijkstra-díj, 2016

Varjú Péter: Európai Matematikai Társulat Díja, 2016

Lovász László: Hüpatia-díj, 2019

Tardos Gábor: Gödel-díj, 2020

Lovász László: Abel-díj, 2021

Hivatkozások

[1] M. Abért, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolov, J. Raimbault, and I. Samet, On the growth of L^2-invariants for sequences of lattices in Lie groups. *Annals of Mathematics* **185** (2017), 711–790.

[2] M. Abért, Y. Glasner, and B. Virág, Kesten's theorem for invariant random subgroups. *Duke Math. J.* **163** (2014), 465–488.

[3] G. Abrams, P.N. Ánh, and E. Pardo, Isomorphisms between Leavitt algebras and their matrix rings. *J. reine angew. Math.* **624** (2008), 103–132.

[4] R. Ahlswede and I. Csiszár, Common randomness in information theory and cryptography. Part 1: secret sharing, *IEEE Trans. Inform. Theory* **39** (1993), 1121–1132.

[5] R. Ahlswede and I. Csiszár, Common randomness in information theory and cryptography. Part 2: CR capacity, *IEEE Trans. Inform. Theory* **44** (1998), 225–240.

[6] M. Ajtai, J. Komlós and E. Szemerédi, An $O(n \log n)$ sorting network. In: *Proc. of the 15th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'1983)*, 1983, 1–9.

[7] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő and J. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems I, *Acta Math. Hungar.* **108** (3) (2005), 207–238.

[8] S. Akiyama and A. Pethő, Discretized rotation has infinitely many periodic orbits, *Nonlinearity* **26** (2013), 871–880.

[9] A.-L. Barabási and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* **286** (1999), no. 5439, 509–512.

[10] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer and G. Tusnády, The degree sequence of a scale-free random graph process, *Random Structures Algorithms* **18** (2001), no. 3, 279–290.

[11] N. Alon, M. Nathanson and I. Ruzsa, The polynomial method and restricted sums of congruence classes, *J. Number Theory* **56** (1996), no. 2, 404–417.

[12] N. Alon, L. Rónyai, and T. Szabó, Norm-graphs: variations and applications. *J. Combin. Theory B* **76** (1999), 280–290.

[13] E. Andersén and L. Lempert, On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$, *Invent. Math* **110**, 1992, 371–388.

[14] L. Babai, Trading group theory for randomness. In: *Proc. of the 17th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'1985)*, 1985, 421–429.

[15] L. Babai, Graph isomorphism in quasipolynomial time. In: *Proceedings of the 48th annual ACM symposium on Theory of Computing (STOC'2016)*, 2016, 684—697. A teljes dolgozat: https://arxiv.org/abs/1512.03547

[16] L. Babai, R.M. Beals and Á. Seress, Polynomial-time theory of matrix groups. In: *Proceedings of the 41st annual ACM symposium on Theory of computing (STOC'2009)*, 2009, 55—64.

[17] L. Babai, L. Fortnow, L.A. Levin and M. Szegedy, Checking computations in polylogarithmic time. In: *Proceedings of the twenty-third annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'1991)*, 1991, 21–32.

[18] Á. Backhausz and B. Szegedy, On the almost eigenvectors of random regular graphs. *Annals of Probability* **47** (2019), 1677–1725.

[19] P. Bálint and S. Gouëzel, Limit theorems in the stadium billiard, *Communications in Mathematical Physics* **263** (2006), 461–512.

[20] P. Bálint, B. Tóth and P. Tóth, On the zero mass limit of tagged particle diffusion in the 1-d Rayleigh-gas, *J. Stat. Phys.* **127** (2007), no. 4, 657–675.

[21] P. Bálint and P. Tóth, Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards, *Ann. Henri Poincaré* **9** (2008), no. 7, 1309–1369.

[22] A. Balog, A. Biró, G. Cherubini, N. Laaksonen, Bykovskii-type theorem for the Picard manifold, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, megjelenés alatt, `DOI:10.1093/imrn/rnaa128`

[23] A. Balog and E. Szemerédi, A statistical theorem of set addition, *Combinatorica* **14** (1994), no. 3, 263–268.

[24] J. Balogh, B. Bollobás, and M. Simonovits, The number of graphs without forbidden subgraphs. *J. Combin. Theory B* **91** (2004), 1–24.

[25] B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin and A. Neumaier, Global attractivity of the zero solution for Wright's equation, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **13** (2014), no. 1, 537–563.

[26] J. Beck, An algorithmic approach to the Lovász Local Lemma. *Random Structures and Algorithms* **2**(4) (1991), 343–365.

[27] J. Beck, Diophantine approximation and quadratic fields, in: *Number Theory*, K. Győry et al. (eds.), de Gruyter, 1998, 55–93.

[28] M. A. Bennett, K. Győry, M. Mignotte and Á. Pintér, Binomial Thue equations and polynomial powers, *Compositio Math.* **142** (2006), 1103–1121.

[29] A. Bérczes, Effective results for unit points on curves over finitely generated domains, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **158** (2015), 331–353.

[30] A. Bérczes, J.-H. Evertse and K. Győry, Effective results for Diophantine equations over finitely generated domains, *Acta Arith.* **163** (2014), 71–100.

[31] K. Bérczi and A. Frank, Supermodularity in unweighted graph optimization, Part I: Branchings and matchings. *Mathematics of Operations Research* **43** (2018), 726–753.

[32] K. Bérczi and A. Frank, Supermodularity in unweighted graph optimization, Part II: Matroidal term rank augmentation. *Mathematics of Operations Research* **43** (2018), 754–762.

[33] K. Bérczi and A. Frank, Supermodularity in unweighted graph optimization, Part III: Highly-connected digraphs. *Mathematics of Operations Research* **43**(2018), 763–780.

[34] Cs. Bertók and L. Hajdu, A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations and its applications, *Math. Comp.* **85** (2016), 849–860.

[35] A. Biró, An upper estimate in Turán's pure power sum problem, *Indag. Math.* (N.S.) **11** (2000), no. 4, 499–508.

[36] A. Biró, Yokoi's conjecture, *Acta Arithmetica* **106** (2003), 85–104.

[37] A. Biró, Chowla's conjecture, *Acta Arithmetica* **107** (2003), 179–194.

[38] A. Biró, V. F. Lev, Uncertainty in finite planes, arXiv:1808.07424

[39] V. Blomer, G. Harcos, Twisted L-functions over number fields and Hilbert's eleventh problem, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), 1–52.

[40] V. Blomer, G. Harcos, P. Maga, D. Milićević, The sup-norm problem for GL(2) over number fields, *J. Eur. Math. Soc.* **22** (2020), 1–53.

[41] V. Blomer, P. Maga, Subconvexity for sup-norms of cusp forms on PGL(n), *Selecta Math. (N.S.)* **22** (2016), 1269–1287.

[42] B. Bollobás, and P. Erdős, Graphs of extremal weights. *Ars Combin.* **50** (1998), 225–233.

[43] A. Bonami and Sz. Gy. Révész, Failure of Wiener's property for positive definite periodic functions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), no. 1-2, 39–44.

[44] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztergombi, Counting graph homomorphisms. *Topics in discrete mathematics*, 315–371, Algorithms Combin., **26**, Springer, Berlin, 2006.

[45] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztergombi, Convergent sequences of dense graphs. I. Subgraph frequencies, metric properties and testing. *Adv. Math.* **219** (2008), 1801–1851.

[46] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztergombi, Convergent sequences of dense graphs II. Multiway cuts and statistical physics. *Annals of Math.* **176** (2012), 151–219.

[47] Z. Buczolich, Solution to the gradient problem of C. E. Weil, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), no. 3, 889–910.

[48] Z. Buczolich and R.D. Mauldin, Divergent square averages, *Ann. of Math.* (2) 171 (2010), no. 3, 1479–1530.

[49] D. De Caen, and Z. Füredi, The maximum size of 3-uniform hypergraphs not containing a Fano plane. *J. Combin. Theory B* **78** (2000), 274–276.

[50] G. Cherubini, H. Wu, G. Zábrádi, On Kuznetsov–Bykovskii's formula of counting prime geodesics, közlésre benyújtva, `arXiv:1901.03824`

[51] E. Crane, B. Ráth, and D. Yeo. Age evolution in the mean field forest fire model via multitype branching processes, *Annals of Probability* **49** (2021), 2031–2075.

[52] E. Croot, V. F. Lev, and P. P. Pach, Progression-free sets in Z_4^n are exponentially small. *Annals of Math.* **185** (2017), 331–337.

[53] J. Csirik, D.S. Johnson, C. Kenyon, J.B. Orlin, P.W. Shor and R.R. Weber, On the sum-of-squares algorithm for bin packing. *Journal of the ACM* **53**(1) (2006), 1–65.

[54] I. Csiszár, Almost independence and secrecy capacity (oroszul), *Problems of Information Transmission* **32** (1996) 48–57.

[55] I. Csiszár and P. Narayan, The secret key capacity for multiple terminals, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** (2004) 3047–3061.

[56] I. Csiszár and P. Narayan, Secrecy capacities for multiterminal channel models, *IEEE Trans. Inform. Theory* **54** (2008) 2437–2452.

[57] I. Csiszár and P. Narayan, Secrecy generation for multi-access channel models, *IEEE Trans. Inform. Theory* **59** (2013) 17–31.

[58] I. Csiszár and P. Shields, The cinsustency of the BIC Markov order estimation, *Ann. Statist.* **28** (2000) 1601–1619.

[59] I. Csiszár and Zs. Talata, Context tree estimation for not necessarily finite memory processes via BIC and MDL, *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** (2006) 1007–1016.

[60] I. Csiszár and Zs. Talata, Consistent estimation of the basic neighborhood of Markov random fields, *Ann. Statist.* **34** (2006) 123–145.

[61] S. Csörgő, Probabilistic approach to limit theorems for the St. Petersburg game. With a preface by Vilmos Totik, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **76** (2010), no. 1–2, 233–350.

[62] E. Csuhaj-Varjú, J. Dassow, J. Kelemen, and G. Păun, Grammar systems. A grammatical approach to distribution and cooperation. Topics in Computer Mathematics, 5. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1994. viii+246 pp. ISBN: 2-88124-957-4

[63] U.B. Darji, M. Elekes, K. Kalina, V. Kiss and Z. Vidnyánszky, The structure of random automorphisms of countable structures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (2019), no. 12, 8829–8848.

[64] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, Cycle integrals of the j-function and mock modular forms, *Ann. of Math.* **173** (2011), 947–981.

[65] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, Geometric invariants for real quadratic fields, *Ann. of Math.* **184** (2016), 949–990.

[66] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, Modular cocycles and linking numbers, *Duke Math. J.* **166** (2017), 1179–1210.

[67] J. Egerváry, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931), 16–28.

[68] Elek, G., and E. Szabó, Hyperlinearity, essentially free actions and L^2-invariants. The sofic property. *Math. Ann.* **332** (2005) 421—441.

[69] G. Elek, and E. Szabó, On sofic groups. *Journal of group theory* **9** (2006), 161–171.

[70] Gy. Elekes, On the number of sums and products, *Acta Arith.* **81** (1997), no. 4, 365–367.

[71] Gy. Elekes, and L. Rónyai, A combinatorial problem on polynomials and rational functions. *J. Combin. Theory A* **89** (2000), 1–20.

[72] M. Elekes, V. Kiss and Z. Vidnyánszky, Ranks on the Baire class ξ functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 11, 8111–8143.

[73] J. Engelfriet, Z. Fülöp, and A. Maletti, Composition Closure of Linear Extended Top-down Tree Transducers, *Theory of Computing Systems*, 60 (2017) 129–171.

[74] P. Erdős and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *Infinite and Finite Sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday)* (eds A. Hajnal, R. Rado and V. T. Sós), North-Holland (Amsterdam, London,1975), volume II, 609–627.

[75] Z. Ésik, Group axioms for iteration, *Information and Computation*, 148 (1999) 131–180.

[76] J.-H. Evertse and K. Győry: *Unit Equations in Diophantine Number Theory.* Cambridge University Press, 2015.

[77] J.-H. Evertse and K. Győry: *Discriminant Equations in Diophantine Number Theory.* Cambridge University Press, 2017.

[78] J.-H. Evertse and K. Győry: *Effective Results and Methods for Diophantine Equations over Finitely Generated Domains.* Cambridge University Press, megjelenés alatt.

[79] U. Feige, S. Goldwasser, L. Lovász, S. Safra and M. Szegedy, Interactive proofs and the hardness of approximating cliques. *Journal of the ACM* **43** (1996), 268–292.

[80] M. Frączyk, G. Harcos, P. Maga, D. Milićević, The density hypothesis for horizontal families of lattices, közlésre benyújtva, `arXiv:2007.13961`

[81] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements. *SIAM J. on Discrete Mathematics* **5** (1992), 22–53. Előzetes változata megjelent a (FOCS'90) kötetben.

[82] A. Frank, Connectivity augmentation problems in network design. In: *Mathematical Programming: State of the Art* 1994, (J.R. Birge and K.G. Murty, eds.), The University of Michigan, 34–63.

[83] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets. *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **65**(1995), 73–110.

[84] P. Frankl, and V. Rödl, The uniformity lemma for hypergraphs. *Graphs Combin.* **8** (1992), 309–312.

[85] P. Frankl, and V. Rödl, Extremal problems on set systems. *Random Structures Algorithms* **20** (2002), 131–164.

[86] M. L. Fredman, J. Komlós, E. Szemerédi, Storing a sparse table with $O(1)$ worst case access time. *Journal of the ACM* **31** (1984), 538–544.

[87] J. Fritz, T. Funaki and J.L. Lebowitz, Stationary states of random Hamiltonian systems, *Probab. Theory Related Fields* **99** (1994), no. 2, 211–236.

[88] Z. Füredi, The maximum number of edges in a minimal graph of diameter 2, *J. Graph Theory* **16** (1992), 81–98.

[89] Z. Füredi, New asymptotics for bipartite Turán numbers. *J. Combin. Theory A* **75** (1996), 141–144.

[90] Z. Füredi, An upper bound on Zarankiewicz' problem. *Combinatorics, Computing and Probability* **5** (1996), 29–33.

[91] Z. Füredi, O. Pikhurko, and M. Simonovits, On triple systems with independent neighborhoods. *Combinatorics, Computing and Probabality* **14** (2005), 795–813.

[92] I. Gaál: *Diophantine Equations and Power Integral Bases.* 2nd ed., Birkhäuser, 2019.

[93] P. Gács, J. Körner, Common information is much less than mutual information, *Problems of Control and Information Theory* **2** (1973) 149–162.

[94] C. Garban, G. Pete and O. Schramm, The Fourier spectrum of critical percolation. *Acta Math.* **205** (2010), 19–104.

[95] C. Garban, G. Pete and O. Schramm, Pivotal, cluster and interface measures for critical planar percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), 939–1024.

[96] C. Garban, G. Pete and O. Schramm, The scaling limits of near-critical and dynamical percolation. *J. Europ. Math. Soc.* **20** (2018), 1195–1268.

[97] J. Gebel, A. Pethő and H. G. Zimmer, Computing integral points on elliptic curves, *Acta Arith.* **68** (1994), 171–192.

[98] J. Gebel, A. Pethő and H. G. Zimmer, On Mordell's equation, *Compositio Math.* **110** (1998), 335–367.

[99] G.P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces, II. *Adv. Math.* **332** (2018), 287–310.

[100] S. Gelly, L. Kocsis, M. Schoenauer, M. Sebag, D. Silver, Cs. Szepesvári and O. Teytaud, The grand challenge of computer Go: Monte Carlo tree search and extensions. *Communications of the ACM* **55**(3) (2012), 106–113.

[101] R. Godement, Sur la théorie des représentations unitaires, *Ann. of Math.* (2), **53**, 1951, 68–124.

[102] Goldston, Daniel A., Pintz, J., Yıldırım, Cem Y., Primes in tuples. I, *Ann. of Math.* (2) **170** (2009), no. 2, 819–862.

[103] Goldston, Daniel A., Pintz, J., Yıldırım, Cem Y., Primes in tuples. II, *Acta Math.* **204** (2010), no. 1, 1–47.

[104] T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *GAFA* **11** (2001), 465–588.

[105] Ł. Grabowski, A. Máthé and O. Pikhurko, Measurable circle squaring, *Ann. of Math.* (2) 185 (2017), no. 2, 671–710.

[106] P. Guasoni, M. Rásonyi, and W. Schachermayer, Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs, *Ann. Appl. Probab.* **18** (2008), 491–520.

[107] P. Guasoni, Zs. Nika and M. Rásonyi, Trading fractional Brownian motion, *SIAM J. Financial Math.* **10** (2019), no. 3, 769–789.

[108] B. Green and T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. of Math.* (2) **167** (2008), no. 2, 481–547.

[109] A. Gyárfás, M. Ruszinkó, G. Sárközy, and E. Szemerédi, Three-color Ramsey numbers for paths. *Combinatorica* **27** (2007), 35–69.

[110] K. Gyarmati, Measures of pseudorandomness, in: *Finite Fields and Their Applications*, eds. P. Charpin et al., de Gruyter, 2013, 43–64.

[111] K. Gyarmati, C. Mauduit and A. Sárközy, Pseudorandom binary sequences and lattices, *Acta Arith.* **135** (2008), 181–197.

[112] K. Gyarmati, C. Mauduit and A. Sárközy, On finite pseudorandom binary lattices, *J. Discrete Applied Math.* **216** (3) (2017), 589–597.

[113] K. Gyarmati, A. Pethő and A. Sárközy, On linear recursion and pseudorandomness, *Acta Arith.* **118** (2005), 359–374.

[114] Z. Gyenis: On the modal logic of Jeffrey conditionalization, *Log. Univers.*, **12**(2018), no. 3-4, 351–374.

[115] T. Gyimóthy, R. Ferenc and P. Siket, Empirical Validation of Object-Oriented Metrics on Open Source Software for Fault Prediction. *IEEE Transactions on Software Engineering* **31** (2005), 897–910.

[116] A. Jaikin-Zapirain, and L. Pyber, Random Generation of Finite and Profinite Groups and Group Enumeration, *Annals of Mathematics* **173** (2011), 769–814.

[117] G. Janelidze, L. Márki, and W. Tholen, Semi-abelian categories, *Journal of Pure and Applied Algebra* **168** (2002), 367–386.

[118] K. Győry: *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables.* Kingston, Canada, 1980.

[119] K. Győry, On the numbers of families of solutions of systems of decomposable form equations, *Publ. Math. Debrecen* **42** (1993), 65–101.

[120] K. Győry, Discriminant form and index form equations, in: *Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, de Gruyter*, 2000, pp. 191–214.

[121] K. Győry, I. Pink and Á. Pintér, Power values of polynomials and binomial Thue-Mahler equations, *Publ. Math. Debrecen* **65** (2004), 341–362.

[122] K. Győry, L. Hajdu and Á. Pintér, Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression, *Compositio Math.* **145** (2009), 845–864.

[123] L. Hajdu and Sz. Tengely, Powers in arithmetic progressions, *Ramanujan J.* (2021), https://doi.org/10.1007/s11139-020-00331-5.

[124] A. Hajnal: Embedding finite graphs into graphs colored with infinitely many colors. *Israel J. Math.*, **73**(1991), no. 3, 309–319.

[125] G. Harcos, P. Michel, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II, *Invent. Math.* **163** (2006), 581–655.

[126] F. Hiai and D. Petz: *The semicircle law, free random variables and entropy.* Mathematical Surveys and Monographs, 77. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[127] J. Hladký, J. Komlós, D. Piguet, M. Simonovits, M. Stein, and E. Szemerédi, The approximate Loebl–Komlós–Sós conjecture I-IV. *SIAM J. Discrete Math.* **31** (2017), 945—982, 983–1016, 1017–1071, 1072—1148.

[128] I. Horváth, B. Tóth, and B. Vető, Diffusive limits for „true" (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in three and more dimensions, *Probab. Theory Rel. Fields* **153** (2012), 691–726.

[129] K-H. Indlekofer and A. Járai, Largest known twin primes and Sophie Germain primes, *Mathematics of Computation* **68** (1999), 1317–1324.

[130] G. Ivanyos, Y. Qiao and K.V. Subrahmanyam, Non-commutative Edmonds' problem and matrix semi-invariants, *Computational Complexity* **26** (2017), 717—763.

[131] A. Járai: *Regularity properties of functional equations in several variables.* Advances in Mathematics (Springer), 8. Springer, New York, 2005.

[132] M. Jelasity, A. Montresor and O. Babaoglu, Gossip-based aggregation in large dynamic networks, *ACM Transactions on Computer Systems (TOCS)* **23** (2005), 219–252.

[133] A. Jenčová and D. Petz, Sufficiency in quantum statistical inference. A survey with examples, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006), no. 3, 331–351.

[134] I. Juhász *Cardinal functions.* II. Handbook of set-theoretic topology, 63—109, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[135] I. Juhász: *Cardinal functions.* Recent progress in general topology (Prague, 1991), 417–441, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[136] Gy. Károlyi, Z. L. Nagy, F. V. Petrov, and V. Volkov, A new approach to constant term identities and Selberg-type integrals, *Adv. Math.* **277** (2015), 252–282.

[137] K.A. Kearnes, and E.W. Kiss, *The shape of Congruence Lattices.* American Mathematical Society, 2012.

[138] T. Keleti and P. Shmerkin, New bounds on the dimensions of planar distance sets, *Geom. Funct. Anal.* **29** (2019), no. 6, 1886–1948.

[139] L. Kocsis, Cs. Szepesvári, Bandit based Monte-Carlo planning. In: *European Conference on Machine Learning (2006)*, 2006, 282–293.

[140] J. Kollár, L. Rónyai, and T. Szabó, Norm-graphs and bipartite Turán numbers. *Combinatorica* **16** (1996), 399–406.

[141] P. Komjáth: A decomposition theorem for $\mathbb{R}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120** (1994), 921–927.

[142] P. Komjáth, S. Shelah: Finite subgraphs of uncountably chromatic graphs, *Journal of Graph Theory*, **49** (2005), 28–38.

[143] P. Komjáth, V. Totik: *Problems and Theorems in Classical Set Theory*, Springer, 2006.

[144] J. Komlós, G. Sárközy, and Szemerédi, Blow-up lemma. *Combinatorica* **17** (1997), 109–123.

[145] J. Komlós, G. Sárközy, and Szemerédi, An algorithmic version of the blow-up lemma. *Random Structures Algorithms* **12** (1998), 297–312.

[146] J. Komlós, G. Sárközy, and Szemerédi, Proof of the Alon-Yuster conjecture. *Discrete Math.* **235** (2001), 255–269.

[147] B. Kovács and A. Pethő, Number systems in integral domains especially in orders of algebraic number fields, *Acta Sci. Math. Szeged* **55** (1991), 287–299.

[148] Kőnig D., Graphok és matrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931), 116–119.

[149] A. Krámli, N. Simányi and D. Szász, The K-property of three billiard balls, *Ann. of Math.* (2) **133** (1991), no. 1, 37–72.

[150] A. Krámli, N. Simányi and D. Szász, The K-property of four billiard balls, *Comm. Math. Phys.* **144** (1992), no. 1, 107–148.

[151] H.W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem. *Naval Research Logistic Quarterly* **2** (1955), 83–97.

[152] M. Kurucz, A.A. Benczúr, and K. Csalogány, Methods for large scale SVD with missing values. In: *Proceedings of KDD cup and workshop*, 2007,(Vol. 12, 31–38.

[153] M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem, *J. reine und angew. Math.* (Crelle's J.) **404** (1990), 77–117.

[154] M. Laczkovich, The difference property. In: *Paul Erdős and his Mathematics* (editors: G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits and V. T. Sós), Springer, 2002. Vol. I, 363–410.

[155] L. Lempert, R. Szőke, A new look at adapted complex structures, *Bull. Lond. Math. Soc.* **44**, 2012, 367–374.

[156] L. Lempert, R. Szőke, Direct images, fields of Hilbert spaces, and geometric quantization, *Comm. Math. Phys.* **327**, 2014, 49–99.

[157] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, and L. Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients. *Matematische Annalen* **261** (1982), 515–534.

[158] L. Lovász, *Large networks and graph limits*. American Mathematical Society Colloquium Publications, **60**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xiv+475 pp.

[159] L. Lovász, and B. Szegedy, Limits of dense graph sequences. *J. Combin. Theory Ser. B* **96** (2006), 933–957.

[160] C. Lutsko and B. Tóth, Invariance principle for the random Lorentz gas — beyond the Boltzmann-Grad limit *Comm. Math. Phys.* **379** (2020), 589–632.

[161] P. Major: *On the estimation of multiple random integrals and U-statistics.* Lecture Notes in Mathematics, 2079. Springer, Heidelberg, 2013.

[162] A. Marcus, and G. Tardos, Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture. *J. Combin. Theory A* **107** (2004), 153–160.

[163] J. Marklof and B. Tóth, Superdiffusion in the periodic Lorentz gas, *Comm. Math. Phys.* **347** (2016), no. 3, 933–981.

[164] K. Marton, Bounding $\overline{d}$ distance by information divergence: a method to prove measure concentration, *Ann. Probab.* **24** (1996), 857–861.

[165] K. Marton, Measure concentration for a class of random processes, *Probab. Theory Related Fields* **110** (1998), 427–439.

[166] K. Marton, Measure concentration for Euclidean distance in the case of dependent random variables, *Ann. Probab.* **32** (2004), 2526–2544.

[167] K. Marton, Logarithmic Sobolev inequalities in discrete product spaces, *Combin. Probab. Comput.* **28** (2019), no. 6, 919–935.

[168] G. Morvai and B. Weiss, Order estimation of Markov chains, *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** (2005), 1496–1497.

[169] G. Morvai and B. Weiss, Universal tests for memory words, *IEEE Trans. Inform. Theory* **59** (2013), 6873–6879.

[170] C. Mauduit, H. Niederreiter and A. Sárközy, On pseudorandom $[0, 1)$ and bínary sequences, *Publicationes Math. Debrecen* **71** (2007), 305–327.

[171] C. Mauduit and A. Sárközy, On finite pseudorandom binary sequences, I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol, *Acta Arith.* **82** (1997), 365–377.

[172] L. Molnár: *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[173] R. A. Moser and G. Tardos, A constructive proof of the general Lovász local lemma, *Journal of the ACM* **57**(2) (2010), Art. 11, 15pp.

[174] A. Némethi, I. Sigray, On the monodromy representation of polynomial maps in n variables, *Stud. Sci. Math Hung.* **39** (2002), 361–367.

[175] M. Ohya and D. Petz: *Quantum entropy and its use.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[176] J. Pach, and G. Tardos, Forbidden paths and cycles in ordered graphs and matrices, *Israel J. Math.* **155** (2006), 359–380.

[177] P.P. Pálfy, and Cs. Szabó, An identity for subgroup lattices of Abelian groups. *Algebra Universalis* **33** (1995), 191–195.

[178] A. Pethő, H.G. Zimmer, J. Gebel and E. Herrmann, Computing all S-integral points on elliptic curves, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **127** (1999), 383 –402.

[179] Pintz, J., A new explicit formula in the additive theory of primes with applications I. The explicit formula for the Goldbach and Generalized Twin Prime Problems, arXiv:1804.05561

[180] Pintz, J., A new explicit formula in the additive theory of primes with applications II. The exceptional set in Goldbach's problem, arXiv:1804.09084

[181] Pintz, J., Ruzsa, I. Z., On Linnik's approximation to Goldbach's problem. II, *Acta Math. Hungar.* **161** (2020), no. 2, 569–582.

[182] Pintz, J., Ruzsa, I. Z., On Linnik's approximation to Goldbach's problem. I, *Acta Arith.* **109** (2003), no. 2, 169–194.

[183] M. Pollicott and K. Simon, The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 3, 967–983.

[184] Polymath, D. H. J., New equidistribution estimates of Zhang type, *Algebra Number Theory* **8** (2014), no. 9, 2067–2199.

[185] Polymath, D. H. J., Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes, *Res. Math. Sci.* **1** (2014), Art. 12, 83 pp.

[186] L. Pyber, Enumerating Finite Groups of Given Order. *Annals of Mathematics* **137** (1993), 203–220.

[187] L. Pyber, and E. Szabó, Growth in finite simple groups of Lie type. *J. Amer. Math. Soc.* **29** (2016), 95–146.

[188] B. Ráth and B. Tóth, Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality, *Electron. J. Probab.* **14** (2009), no. 45, 1290–1327.

[189] L. Rónyai, Computing the structure of finite algebras, *Journal of Symbolic Computation* **9** (1990), 355–373.

[190] I. Ruzsa, Generalized arithmetical progressions and sumsets, *Acta Math. Hungar.* **65** (1994), no. 4, 379–388.

[191] V. Rödl, A. Ruciński, and E. Szemerédi, An approximate Dirac-type theorem for k-uniform hypergraphs. *Combinatorica* **28** (2008), 229–260.

[192] E.B. Saff and V. Totik: *Logarithmic potentials with external fields.* Appendix B by Thomas Bloom. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 316. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[193] A. Sárközy, On finite pseudorandom binary sequences and their applications in cryptography, *Tatra Mt. Math. Publ.* **37** (2007), 123–136.

[194] A. Sárközy, On pseudorandomness of families of binary sequences, *J. Discrete Applied Math.* **216** (3) (2017), 670–676.

[195] T. Sarlós, Improved approximation algorithms for large matrices via random projections. *In: Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'2006)*, 2006, 143–152.

[196] Á. Seress, *Permutation Group Algorithms*. Cambridge University Press, 2003.

[197] I. Sigray, Solution of the polynomial equation $kp'q - lpq'' = cp^m$, *Stud. Sci. Math Hung.* **45** (2), 2008, 161–195.

[198] N. Simányi and D. Szász, Hard ball systems are completely hyperbolic., *Ann. Math.* **149** (1999), 35–96.

[199] N. Simányi, Proof of the Boltzmann-Sinai ergodic hypothesis for typical hard disk systems, *Invent. math.* **154** (2003), 123–178.

[200] M. Simonovits, and V. T. Sós, Hereditarily extended properties, quasi-random graphs and not necessarily induced subgraphs, *Combinatorica* **17** (1997), 577–596.

[201] J. Solymosi, Bounding multiplicative energy by the sumset, *Advances in Math.* **222** (2009), 402–408.

[202] H. Stahl and V. Totik: *General orthogonal polynomials.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[203] J. Szabados and P. Vértesi: *Interpolation of Functions.* World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1990.

[204] D. Szász and T. Varjú, Limit laws and recurrence for the planar Lorentz process with infinite horizon, *J. Stat. Phys.* **129** (2007), 59–80.

[205] L. Székelyhidi: *Discrete Spectral Synthesis and Its Applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2006.

[206] L. Székelyhidi: *Functional Equations on Hypergroups.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

[207] L. Székelyhidi: *Harmonic and Spectral Analysis.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.

[208] R. Szőke, Quantization of compact Riemannian symmetric spaces, *J. Geom. Phys.* **119**, 2017, 286-303.

[209] B. Szőkefalvi-Nagy, C. Foias, H. Bercovici and L. Kérchy: *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space.* Second edition. Revised and enlarged edition. Universitext. Springer, New York, 2010.

[210] G. Tardos, Optimal probabilistic fingerprint codes. In *Proceedings of the 35th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, (STOC 2003)*, 116–125.

[211] G. Tardos, Optimal probabilistic fingerprint codes, *Journal of the ACM* **55**(2) (2008), Art. 10, 24pp.

[212] Á. Tóth, D. Varolin, Holomorphic diffeomorphisms of complex semisimple Lie groups, *Inventiones mathematicae* **139** (2) (2000), 351–369.

[213] Á. Tóth, D. Varolin, Holomorphic diffeomorphisms of semisimple homogeneous spaces, *Compositio Mathematica* **142** (5) (2006), 1308–1326.

[214] B. Tóth, The „true" self-avoiding walk with bond repulsion on $\mathbb{Z}$: limit theorems, *Ann. Probab.* **23** (1995), no. 4, 1523–1556.

[215] B. Tóth and B. Valkó, Superdiffusive bounds on self-repellent Brownian polymers and diffusion in the curl of the Gaussian free field in $d = 2$, *J. Stat. Phys.* **147** (2012), 113–131.

[216] B. Tóth and W. Werner, The true self-repelling motion, *Probab. Theory Relat. Fields* **111** (1998), 375–452.

[217] B. Valkó and B. Virág, Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel, *Invent. Math.* **177** (2009), no. 3, 463–508.

[218] B. Valkó and B. Virág, The Sine_β operator, *Invent. Math.* **209** (2017), no. 1, 275–327.

[219] G. Zábrádi, Multivariable (φ, Γ)-modules and smooth o-torsion representations, *Selecta Math. (N.S.)* **24** (2018), 935–995.

[220] G. Zábrádi, Multivariable (φ, Γ)-modules and products of Galois groups, *Math. Res. Lett.* **25** (2018), 687–721.